Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 19. 2. 2002

1. Dane so točke $A(1,0,2)$, $B(-1,4,4)$, $C(3,-4,0)$ in $D(2,-3,0)$.
   (a) Dokaži, da so točke A, B in C kolinearne in zapiši enačbo premice p, ki poteka skozi te tri točke.
   (b) Zapiši enačbo ravnine Σ, ki vsebuje premico p in točko D.
   (c) Zapiši enačbo premice q, ki leži v ravnini Σ, poteka skozi točko D in je pravokotna na premico p.

2. Za katero število $a \in \mathbb{R}$ matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2a-1 & a-3 \end{bmatrix}$$
ni obrnljiva? Za to število a reši matrično enačbo $Ax = 0$, $x \in \mathbb{R}^4$. Zapiši razsežnost in kakšno bazo prostora rešitev. Kaj je rešitev te matrične enačbe za poljubno drugo realno število $a \in \mathbb{R}$?

3. Zapiši karakteristični in minimalni polinom, lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$
Ali obstaja diagonalna matrika, podobna matriki A? Če obstaja, jo tudi izračunaj.

4. Dana je preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,
$$\mathcal{A}(x,y,z,w) = (2x + y - w, x + y + z, 4x + 2y - 2w).$$
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava in določi matriko A, ki pripada tej linearni preslikavi glede na običajni urejeni bazi v $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^3$.
   (b) Poišči poljubno bazo Σ jedra preslikave $\mathcal{A}$ ter poljubno bazo Π zaloge vrednosti preslikave $\mathcal{A}$. Koliko je $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$ in $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}$?
   (c) Dopolni Σ do urejene baze Σ' prostora $\mathbb{R}^4$ in Π do urejene baze Π' prostora $\mathbb{R}^3$. Kakšna matrika pripada linearni preslikavi $\mathcal{A}$ glede na urejeni bazi Σ' in Π'?

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 4. 2. 2002

1. V pravilnem tetraedru $ABCD$ naj bo T težišče trikotnika ΔABC in T' težišče trikotnika ΔACD.
   (a) Dokaži, da sta vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{CD}$ pravokotna in vektorja $\overrightarrow{TT'}$, $\overrightarrow{BD}$ vzporedna.
   (b) Izračunaj kot med stranskim robom in osnovno ploskvijo tetraedra.
   (c) S pomočjo mešanega produkta izračunaj volumen tetraedra.

2. Reši matrično enačbo $A^2X = AC - 2AX$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

   Izračunaj tudi $\det X$, $\operatorname{rang} X$ ter X^{-1}, če obstajajo.

3. Linearni preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ pripada v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^4$ matrika A in preslikavi $\mathcal{B} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ pripada v bazi $\mathcal{B} = \{(1,0,1,0), (0,1,0,-1), (1,1,0,0), (0,0,1,1)\}$ matrika B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   Določi $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$, $\operatorname{Ker} \mathcal{B}$, njuno vsoto in presek.

4. (a) Zapiši karakteristični polinom in lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & 1-a \end{bmatrix}.$$

   (b) Glede na parameter a poišči lastne vektorje, ki pripadajo lastnim vrednostim matrike A.
   (c) Za katere a je matrika A podobna diagonalni matriki D? Določi tudi matriko P, da bo veljalo $D = P^{-1}AP$.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 4. 6. 2002

1. Dana je ravnina $\pi : x + 2y - z = 0$ in točki $A\,(2, -1, 2)$ in $B\,(0, 3, 0)$. Poišči množico točk v ravnini π, ki so enako oddaljene od točk A in B.

2. Ugotovi, za katere vrednosti realnih števil a in b je sistem:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 0 \\ x + y + 2z - t &= 1 \\ 3x + (a+3)\,y + 6z + (a-3)\,t &= 1 \\ x + 3y + 4z + (a+1)\,t &= b \end{aligned}$$

   protisloven, enolično rešljiv in rešljiv s parametrom. Rešitve tudi poišči.

3. V prostoru $\mathbb{R}_3\,[X]$ realnih polinomov stopnje največ 3 sta podana vektorska podprostora:

$$\begin{aligned} &U = \mathcal{L}\left\{x^3 + 2x^2 + x - 1,\ x^3 - x^2 + 2x + 1,\ x^3 + 8x^2 - x - 5\right\}, \\ &V = \left\{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \middle|\, 2a_3 - a_2 - a_1 = a_0,\ a_3 - a_2 = a_1,\ a_3 = a_0\right\}. \end{aligned}$$

   Določi baze in razsežnosti prostorov U, V, $U \cap V$ in $U + V$. Ali je vsota direktna?

4. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, ki prezrcali vsako točko v $\mathbb{R}^3$ prek ravnine $x - 2y + z = 0$.

   (a) Kakšne so lastne vrednosti in lastni podprostori preslikave $\mathcal{A}$? Določi jih!

   (b) Poišči diagonalno matriko A, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v primerni bazi. Napiši to bazo!

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 27. 8. 2002

1. V $\mathbb{R}^3$ sta dani točki $A\,(4,1,1)$ in $B\,(2,1,1)$ ter premica p, ki je presek ravnin $\pi: 2x-y=2$ in $\Sigma: x-y-z=1$. Določi točko $C \in p$ tako, da bo
   (a) enako oddaljena od točk A in B;
   (b) trikotnik ΔABC pravokoten.

   Obravnavaj vse možnosti!

2. Glede na realno število λ obravnavaj rešljivost sistema:
$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & \lambda z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda \\ \lambda x & + & y & + & z & = & \lambda^2 \end{array}.$$

3. V prostoru $\mathbb{R}_4\,[X]$ realnih polinomov stopnje največ 4 je dana množica:
$$U = \{p \in \mathbb{R}_4\,[X]\,; p\,(1) = p'\,(0) = 0\}\,.$$
   (a) Dokaži, da je U vektorski podprostor in določi njegovo bazo in razsežnost.
   (b) Za vsako od množic A, B, C in D ugotovi ali je ogrodje ali je baza prostora U
$$\begin{aligned} A &= \left\{x^4+x^3-2, x^4+x^2-2, x^3-x^2\right\}, \\ B &= \left\{x^4+x^3, x^4+x^2-2, x^2-1\right\}, \\ C &= \left\{x^4+x^3-2, x^4+x^2-2, x^2-1\right\}, \\ D &= \left\{x^4+x^3-2, 2x^4+x^3-3, x^4+x^3+x^2-3, x^2-1\right\}. \end{aligned}$$

4. Naj bo $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, ki prezrcali vsako točko v $\mathbb{R}^3$ prek premice $x=y=z$.
   (a) Kakšne so lastne vrednosti in lastni podprostori preslikave $\mathcal{A}$? Določi jih!
   (b) Poišči diagonalno matriko A, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v primerni bazi. Napiši to bazo!
   (c) Kakšna matrika pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardni bazi?

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 10. 9. 2002

1. (25) V trapezu $ABCD$ je znano razmerje stranic $AB : DC = 3 : 1$.
   (a) Naj bo E razpolovišče daljice DC in S presečišče daljic AC in BE. Izrazi vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AD}$ ter določi vrednost razmerja $AS : SC$.
   (b) Dokaži, da je ploščina danega trapeza $\frac{2}{3}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$.

2. (25) Glede na realno število a obravnavaj rešljivost sistema:
$$\begin{aligned} x + y + u &= 2, \\ x + y + az + 2u &= 3 - a, \\ az + 2u &= 2 - a, \\ 2x + (a+1)\,y + u &= 4 - a. \end{aligned}$$

3. (20) Reši enačbo
$$\begin{vmatrix} 1 & x+1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & x+2 & -3 \\ 3 & x+3 & x+4 & -4 \\ 4 & 4 & x+5 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & 6 \\ -1 & 3x \end{vmatrix}.$$

4. (30) Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_3[X]$ realnih polinomov stopnje največ 3 je s predpisom
$$(\mathcal{A}p)(x) = (1-x)\,p'(x)$$
definirana preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$.
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearni operator.
   (b) Zapiši matriko, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_3[X]$ pripada operatorju $\mathcal{A}$.
   (c) Določi podprostora $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Im}\mathcal{A}$. Koliko je njuna razsežnost?
   (d) Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje operatorja $\mathcal{A}$. Ali obstaja baza, v kateri operatorju $\mathcal{A}$ pripada diagonalna matrika? Če obstaja, zapiši to bazo in pripadajočo diagonalno matriko.

Točke so razporejene ob nalogah.