Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 27. 1. 2003

1. (25) Dani sta ravnini $\pi : x - z = 1$ in $\Sigma : x - 2y + z = 1$.
   (a) Zapiši enačbo premice p, ki je presek ravnin π in Σ.
   (b) Zapiši enačbo krogle K s središčem $S(1,1,1)$ in polmerom $r = \sqrt{3}$.
   (c) Določi enačbo ravnin, ki sta pravokotni na premico p in se dotikata krogle K.

2. (20) Naj bosta $A, B \in M_3(\mathbb{R})$. Določi matriko C tako, da bo množica
$$U = \left\{ X \in M_3(\mathbb{R})\,; AXB^T = C \right\}$$
vektorski podprostor v $M_3(\mathbb{R})$. Določi še bazo in razsežnost prostora U v primeru, ko je
$$A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. (30) Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_3[X]$ realnih polinomov stopnje največ 3 je s predpisom
$$(\mathcal{A}p)(x) = p(x+1) - p(x)$$
definirana preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$.
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava.
   (b) Zapiši matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_3[X]$.
   (c) Določi podprostora $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Im}\mathcal{A}$. Koliko je njuna razsežnost?
   (d) Določi matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v bazi $\{6,\ 6x+6,\ 3x^2+3x+1,\ x^3\}$ prostora $\mathbb{R}_3[X]$.

4. (20) Zapiši karakteristični polinom, podobno diagonalno matriko, matriko prehoda in minimalni polinom matrike
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Točke so razporejene ob nalogah.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 10. 2. 2003

1. Težiščnica tristrane piramide je daljica, ki spaja oglišča piramide s težiščem nasprotne ploskve.
   (a) Dokaži, da se vse štiri težiščnice poljubne tristranične piramide sekajo v eni točki imenovani težišče. V kakšnem razmerju ta točka deli težiščnico?
   (b) Določi težišče tristrane poramide z oglišči $A\,(0,0,0)$, $B\,(4,0,0)$, $C\,(0,4,0)$ in $D\,(0,0,4)$.

2. Glede na realni parameter a obravnavaj rešljivost in poišči rešitev linearnega sistema:

$$\begin{aligned} x - y + 2az + 3u &= 1 \\ 2x + (2-a)y + z - au &= -1 \\ 3x + (2+a)\,z + 2u &= 0 \\ 4x - y + 5z + 5u &= 3. \end{aligned}$$

3. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_2\,[X]$ realnih polinomov stopnje največ 2 je s predpisom:

$$(\mathcal{A}p)\,(x) = \left(x^2 + 2x + 3\right) p''\,(x) + (x+1)\,p'\,(x) - 3p\,(x)$$

   definirana preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2\,[X] \to \mathbb{R}_2\,[X]$.
   (a) Prepričaj se, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava in določi podprostora $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$.
   (b) Določi matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v bazi $\{x^2+2,\ x^2+x,\ 2x^2+x+3\}$ prostora $\mathbb{R}_2\,[X]$.

4. Zapiši karakteristični polinom, podobno diagonalno matriko, matriko prehoda in minimalni polinom matrike

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

   Izračunaj tudi A^5!

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 9. 6. 2003

1. Pravilni šestkotnik $ABCDEF$ leži v prostoru $\mathbb{R}^3$ in ima za oglišča točke $A\,(a, b, 0)$, $B\,(0, 0, 0)$ in $C\,(1, 0, 1)$. Določi vse pare števil a in b, da bodo podatki smiselni in nato v enem od teh primerov določi koordinate ostalih oglišč.

2. Dan je sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned} x - y + 2az - 2u &= 2c \\ x - y - 2z + 2u &= 0 \\ 2x - y + z - bu &= 0 \\ 3x - 2y + z - bu &= 2b. \end{aligned}$$

   Za katere vrednosti parametrov a, b in c je sistem rešljiv? Kdaj je enolično rešljiv? V tem primeru rešitev tudi zapiši!

3. Naj bosta $U = \{p \in \mathbb{R}_3\,[X]\,|\int_0^2 p\,(x)\,dx = 0\}$ in $V = \{p \in \mathbb{R}_3\,[X]\,|p'\,(1) = 0\}$ vektorska podprostora polinomov stopnje največ 3. Določi razsežnost in zapiši primere baz vektorskih podprostorov $U, V, U \cap V$ in $U + V$.

4. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_2\,[X]$ realnih polinomov stopnje največ 2 je s predpisom:

$$(\mathcal{A}p)\,(x) = (xp\,(x))' - 2x^2 p\left(\frac{1}{x}\right)$$

   definirana preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2\,[X] \to \mathbb{R}_2\,[X]$.

   (a) Prepričaj se, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava in določi matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_2\,[X]$

   (b) Določi podprostora $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$.

   (c) Določi matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v bazi $\{1 + x,\ x + x^2,\ x^2\}$ prostora $\mathbb{R}_2\,[X]$.

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 23. 6. 2003

1. Dana je kocka $ABCDA'B'C'D'$ z osnovno stranico dolžine a. Označimo z d telesno diagonalo AC' in z π ravnino, ki poteka skozi točke $B'CD'$.
   (a) Z uporabo vektorskega in mešanega produkta izračunaj ploščino $\Delta B'CD'$ in prostornino piramide $B'CD'C'$.
   (b) Pod kakšnim kotom prebada diagonala d ravnino π?
   (c) V kakšnem razmerju deli ravnina π diagonalo d? Zapiši najprej parametrično enačbo ravnine π!

2. Množica U naj vsebuje vse matrike, ki komutirajo z matriko
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$
   Dokaži, da je U vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$ in da velja $U = \mathcal{L}\{I, A\}$.

3. Preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3[X] \to M_2(\mathbb{R})$ je podana s predpisom
$$\mathcal{A}p = \begin{bmatrix} p(1) & p'(1) \\ p'(1) & p(-1) \end{bmatrix}.$$
   (a) Preveri, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava in zapiši matriko, ki pripada tej preslikavi v standardnih bazah prostorov $\mathbb{R}_3[X]$ in $M_2(\mathbb{R})$.
   (b) Določi podprostora $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Zapiši njuni bazi in razsežnost.
   (c) Reši enačbo
$$\mathcal{A}p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Prepričaj se, da je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
   podobna diagonalni matriki: poišči tako diagonalno matriko D in tako obrnljivo matriko P, da bo $D = P^{-1}AP$.

Naloge so razporejene po nalogah: $30 + 20 + 30 + 20$.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 25. 8. 2003

1. (30) V $\mathbb{R}^3$ sta dani ravnini $\pi : 2x + y - 2z = 6$ in $\Sigma : 2x - z = -11$ ter točke $A\,(1, -2, 0)$, $B\,(3, 1, -4)$ in $C\,(2, -2, -2)$.

   (a) Zapiši enačbo premice p, ki je vzporedna ravninama π in Σ ter poteka skozi težišče trikotnika ΔABC.

   (b) Zapiši enačbo ravnine Π, ki jo določata premica p in točka B.

   (c) Poišči koordinate pravokotne projekcije točke C na ravnino Π.

2. (20) Naj bosta U in V podprostora v $\mathbb{R}_3\,[X]$; $U = \{a + bx + cx^2 + dx^3 | a + c + d = 0\}$ in $V = \{a + bx + cx^2 + dx^3 | a + b = 0, c - 2d = 0\}$. Poišči primere baz prostorov $U, V, U \cap V$ in $U + V$. Ali je vsota podprostorov U in V direktna?

3. (25) Linearni preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ je glede na standardni bazi prostorov $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^3$ prirejena matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Poišči poljubno bazo Σ jedra preslikave $\mathcal{A}$ ter poljubno bazo Π zaloge vrednosti preslikave $\mathcal{A}$. Koliko je $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$ in $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}$?

   (b) Dopolni Σ do urejene baze Σ' prostora $\mathbb{R}^4$ in Π do urejene baze Π' prostora $\mathbb{R}^3$. Kakšna matrika pripada linearni preslikavi $\mathcal{A}$ glede na urejeni bazi Σ' in Π'?

4. (25) Določi karakteristični polinom, lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje realne matrike

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}, \quad b > 0.$$

   Ali je matrika A podobna diagonalni matriki? Če je, kateri?

Točke so razporejene ob nalogah.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 8. 9. 2003

1. V prostoru $\mathbb{R}^3$ je dana točka $T(a,b,c)$, $a,b,c>0$. Pri tem pravokotne projekcije točke T na koordinatne ravnine $x=0$, $y=0$, $z=0$ določajo ravnino Π in pravokotne projekcije točke T na kordinatne osi x,y,z določajo ravnino Σ. Dokaži, da sta ravnini π in Σ vzporedni in izračunaj medsebojno razdaljo. Nalogo opremi s skico!

2. Reši matrično enačbo
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -8 & -12 \\ -5 & -10 & -5 \\ 10 & 13 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Dani sta množici $U=\{X\in M_3(\mathbb{R})\,|AX=0\}$ in $V=\{X\in M_3(\mathbb{R})\,|XA=0\}$, kjer je
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Dokaži, da sta U in V vektorska podprostora v $M_3(\mathbb{R})$ in zapiši njuni bazi.
   (b) Določi najmanjši podprostor v $M_3(\mathbb{R})$, ki vsebuje U in V, ter največji podprostor, ki je vsebovan v podprostorih U in V. Kolikšna je njuna razsežnost?

4. Naj bo $\mathcal{A}:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}_2[X]$ linearna preslikava, ki po vrsti preslika polinome $x-x^2$, $1+2x$, $1+x$ v polinome $2+2x+2x^2$, $3x$, 1.
   (a) Zapiši matriko, ki pripada linearni preslikavi $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje preslikave $\mathcal{A}$. Ali obstaja baza prostora $\mathbb{R}_2[X]$, v kateri preslikavi $\mathcal{A}$ pripada diagonalna matrika? Odgovor utemelji!

Naloge so enakovredne.

Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - dvopredmetni študij

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

Maribor, 19. 9. 2003

1. Naj bosta premici p in q podani z enačbama:

$$p : x = 2y = z \ , \quad q : \frac{3x-6}{4} = 3y - 3 = \frac{3z-6}{8}.$$

   Pokaži, da se premici p in q sekata ter poišči vse ravnine, glede na katere sta si premici zrcalni.

2. Množica U naj vsebuje vse matrike, ki komutirajo z matriko

$$A = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 2 & a \end{bmatrix} \ , \quad a \in \mathbb{R}.$$

   Dokaži, da je U vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$ in da velja $U = \mathcal{L}\{I, A\}$.

3. Poišči matriko linearne preslikave $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ v standardnih bazah, če veš:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\left(3x^2 + 2x + 1\right) &= 2x^2 - 3, \\ \mathcal{A}\left(x^3 + 4x^2 + 3x + 2\right) &= x^2 + x + 2, \\ \mathcal{A}\left(x^3 + 6x^2 + 4x + 3\right) &= x^2 - x, \\ \mathcal{A}\left(x^3 + x^2 + x\right) &= x + 1. \end{aligned}$$

   Določi tudi $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$!

4. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Poišči njen karakteristični polinom, lastne vrednosti in lastne podprostore. Določi tudi njeno jordansko matriko J in matriko prehoda P.

Naloge so enakovredne.