1. V ravnini ($\mathbb{R}^2$) imamo premico p in krožnico k. Pokaži, da premica p seka krožnico k v dveh (različnih) točkah natanko takrat, ko premica p vsebuje kakšno notranjo točko krožnice k.

2. V $\mathbb{R}^4$ sta podana afina podprostora P_1 in P_2. Poišči bazi prostorov $P_1 \cap P_2$ in $P_1 + P_2$.

$$P_1: \begin{array}{rcl} x_1 &=& -1+t_1 \\ x_2 &=& -2 \\ x_3 &=& -3+t_2 \\ x_4 &=& -4+t_1 \end{array} \qquad P_2: \begin{array}{l} x_1 = 4-2\,s_1-s_2 \\ x_2 = -2-s_1-s_2 \\ x_3 = 2-2\,s_1 \\ x_4 = 5-3\,s_1 \end{array}$$

3. V $\mathbb{R}^5$ sta dana afina podprostora P_1 in P_2. Poišči vse premice, ki vsebujejo točko $(3,2,5,3,2)$ in sekajo prostora P_1 in P_2.

$$P_1: \begin{array}{r} 3\,x_1-4\,x_2+5\,x_3-2\,x_4+\,x_5=28 \\ -x_1-\,x_2+\,x_4+\,x_5=\;\;2 \\ 2\,x_1+\,x_2-\,x_4-2\,x_5=\;\;6 \end{array} \qquad P_2: \begin{array}{r} 4\,x_1+2\,x_2+3\,x_3+\,x_4+\,x_5=38 \\ x_3+\,x_4=12 \\ 2\,x_1+3\,x_3+\,x_5=22 \end{array}$$

4. Poišči vse afine preslikave $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, ki po vrsti preslikajo točke $(3,-1,4)$, $(2,3,0)$, $(-1,3,0)$ in $(1,-1,2)$ v točke $(3,0,1,1)$, $(0,2,-1,1)$, $(3,0,1,1)$ in $(0,2,-1,1)$.

Kolokvij iz Geometrije

(25.5.1999)

1. Naj bodo A,B,C,D,E in F takšne točke evklidske premice, da velja: $E \in FD$, $C \in FD$, $CD \cong ED$, $E \in AD$, $BC \cong BF$, $AB \cong BF$. Poišči zgornjo in spodnjo mejo za moč množice $\{A,B,C,D,E,F\}$. *(5 točk)*

2. Naj bodo A,B,C nekolinearne točke v evklidski revnini in D poljubna od A različna točka. Pokaži, da obstaja premica, ki vsebuje točko A, ne vsebuje točke D in seka daljico BC. V dokazu lahko uporabiš le aksiome povezave in urejenosti in izreke, ki sledijo iz teh aksiomov. *(5 točk)*

3. Naj bo Π ravnina in $f : \Pi \longrightarrow \Pi$ taka preslikava, da sta za poljubni različni točki $A,B \in \Pi$ daljici AB in $f(A)f(B)$ skladni (f je gibanje). Naj bo $\mathcal{N}_f = \{X \in \Pi \mid f(X) = X\}$ množica negibnih točk gibanja f.

   Znano je, da za poljubno premico $p \subset \Pi$ obstaja tako gibanje f, da je $\mathcal{N}_f = p$. Pokaži, da obstaja natanko eno tako gibanje. V dokazu ne smeš uporabiti aksioma o vzporednici. *(5 točk)*

4. Naj bo $\mathbb{R}P^2 = \{a \leq \mathbb{R}^3 | \dim a = 1\}$ in naj bo $\{P \leq \mathbb{R}^3 | \dim P = 2\}$ množica premic. Naj bodo $a,b,c,d \in \mathbb{R}P^2$ različne kolinearne točke v projektivni ravnini. Potem obstaja tak $P \leq \mathbb{R}^3$, $\dim P = 2$, da so $a,b,c,d \leq P$. Naj bodo $\vec{a} \in a$, $\vec{b} \in b$, $\vec{c} \in c, \vec{d} \in d$ neničelni vektorji. Potem obstajajo taki $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, da je $\vec{c} = \alpha_1\,\vec{a} + \beta_1\,\vec{b}$ in $\vec{d} = \alpha_2\,\vec{a} + \beta_2\,\vec{b}$. Pravimo da $(a,b)|(c,d) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \alpha_1\,\alpha_2\,\beta_1\,\beta_2 < 0$.

   Pokaži, da je predznak produkta $\alpha_1\,\alpha_2\,\beta_1\,\beta_2$ odvisen le od a, b, c in d, ne pa od izbranih vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ in $\vec{d}$. *(2 točki)*

   Pokaži da v $\mathbb{R}P^2$ za relacijo $|$ veljata projektivna aksioma urejenosti:

   PU1. Za poljubne tri različne kolinearne točke a,b,c obstaja na premici, ki jo določajo, taka točka d, da $(a,b)|(c,d)$. *(2 točki)*

   PU2. Kadar $(a,b)|(c,d)$, tudi $(b,a)|(c,d)$ in $(c,d)|(a,b)$. *(3 točke)*