1. V ravnini ($\mathbb{R}^2$) imamo paralelogram $ABCD$. Naj bo $A(3,4)$, $B(7,3)$ in $C(8,6)$. Poišči točko $D$, izračunaj ploščino paralelograma $ABCD$ in razdaljo med premicama $(AD)$ in $(BC)$.

2. V $\mathbb{R}^5$ sta s sistemi enačb podana podprostora $P_1$ in $P_2$. Poišči bazo prostora $P_1+P_2$.

$$P_1: \quad \begin{aligned} 3x_1+2x_2+5x_3+8x_4+15x_5 &= 16 \\ 8x_1-3x_2-x_3-x_4+x_5 &= -33 \\ 31x_1-x_2+16x_3+26x_4+51x_5 &= -27 \end{aligned} \qquad P_2: \quad \begin{aligned} 8x_1-4x_2-3x_3-4x_4-3x_5 &= -43 \\ -11x_1+4x_2+x_3+x_4-2x_5 &= 44 \\ -11x_1+5x_2+2x_3+3x_4+4x_5 &= 51 \end{aligned}$$

3. V $\mathbb{R}^4$ poišči vse premice, ki vsebujejo točko $(2,3,8,5)$ ter sekajo ravnino podano z enačbama $2x_1+6x_2-x_3+5x_4=104$, $6x_1+8x_2+3x_3+3x_4=188$ in premico $(-1,5,3,-3)+t\,(2,7,0,-1)$.

4. Za prostor vzamemo krožnico $S$. Točka $B$ leži med točkama $A$ in $C$, če ob sprehodu v smeri urinega kazalca po krožnici $S$ od točke $A$ do točke $C$ prečkamo točko $B$. Daljici (krožna loka) sta skladni, če lahko eno zasučemo v drugo.

   Kateri aksiomi evklidske geometrije za premico so izpolnjeni v zgornjem modelu? (11 aksiomov)

## Izpit iz Geometrije
(4.2.1999)

1. V ravnini ($\mathbb{R}^2$) imamo točki $A(2,7)$ in $B(-1,10)$ ter premico $p: x=2y-7$. Poišči vse take točke $C$ na premici $p$, da bo imel trikotnik $ABC$ ploščino 9.

2. V $\mathbb{R}^5$, je s sistemom enačb podan afin podprostor $P$. Poišči njegovo bazo.

$$P: \quad \begin{aligned} 2x_1-3x_2-12x_3-2x_4+11x_5 &= 7 \\ 6x_1-5x_2-28x_3+2x_4+37x_5 &= 33 \\ 7x_1-5x_2-31x_3+4x_4+44x_5 &= 41 \end{aligned}$$

3. Poišči kako afino preslikavo $A:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, ki po vrsti preslika točke $(2,4,-1)$, $(3,-4,2)$, $(1,3,-2)$ in $(0,2,-1)$ v točke $(-1,9,16)$, $(15,-6,-9)$, $(-4,3,12)$ in $(-3,3,6)$.

   Poišči negibne točke preslikave $A$.

4. S pomočjo aksiomov evklidske geometrije na premici pokaži naslednjo trditev: Za poljubne točke $A$, $B$, $C$ in $D$ iz premice $p$, $A \neq B$, obstaja taka točka $E$ na premici $p$, da sta daljici $AB$ in $DE$ skladni in da $C \notin DE$.

## Izpit iz Geometrije
(15.4.1999)

1. Izračunaj obseg enakokrakega pravokotnega trikotnika, če je eno izmed njegovih oglišč točka $(4,-5)$ in če je premica $3x+5y=4$ nosilka kraka tega trikotnika.

2. V afinem prostoru $\mathbb{R}^4$ sta s sistemi enačb dana podprostora $P_1$ in $P_2$. Poišči bazo prostora $P_1+P_2$.

$$P_1 \;:\; \begin{aligned} x_1+2x_2-x_3+3x_4 &= 1 \\ -3x_1+3x_2+3x_3-4x_4 &= 2 \\ x_1-7x_2-x_3-2x_4 &= -4 \end{aligned} \qquad P_2 \;:\; \left.\begin{aligned} x_1 &= -3+t \\ x_2 &= 5s+t \\ x_3 &= -1-3s+t \\ x_4 &= 1-s-t \end{aligned}\right\} \quad s,t\in\mathbb{R}$$

3. Dana je afina preslikava $A:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Pokaži, da je preslikava $A$ bijektivna in poišči negibne točke inverzne preslikave.

$$A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 11 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

4. Pokaži da v evklidski ravnini obstajajo vsaj štiri premice.

1. V $\mathbb{R}^2$ je dan kvadrat $ABCD$. Poišči koordinate točk $B$ in $D$, če je $A(-6, 10)$ in $C(5, 7)$.

2. Poišči afino preslikavo $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, ki po vrsti preslika točke $(3, 2, 0)$, $(3, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ in $(-1, 2, 1)$ v točke $(7, -8, 7)$, $(9, -3, 5)$, $(3, -1, 5)$ in $(-5, -2, 8)$.

3. Pokaži, da vsaka točka evklidske ravnine leži na neskončno premicah. V dokazu ne smeš uporabiti aksioma o vzporednici ali izrekov, ki sledijo iz tega aksioma.

4. Naj bo $\mathbb{R}P^2 = \{a \leq \mathbb{R}^3 | \dim a = 1\}$ in naj bo $\{P \leq \mathbb{R}^3 | \dim P = 2\}$ množica premic. Naj bodo $a, b, c, d \in \mathbb{R}P^2$ različne kolinearne točke v projektivni ravnini. Potem obstaja tak $P \leq \mathbb{R}^3$, $\dim P = 2$, da so $a, b, c, d \leq P$. Naj bodo $\vec{a} \in a$, $\vec{b} \in b$, $\vec{c} \in c, \vec{d} \in d$ neničelni vektorji. Obstajajo taki $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, da je $\vec{c} = \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b}$ in $\vec{d} = \alpha_2 \vec{a} + \beta_2 \vec{b}$. Predznak produkta $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2$ je odvisen le od $a$, $b$, $c$ in $d$, ne pa od izbranih vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ in $\vec{d}$. Zato lahko definiramo $(a, b)|(c, d) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 < 0$. Pokaži da v $\mathbb{R}P^2$ za relacijo $|$ velja projektiven aksiom urejenosti:

   PU3. Za poljubne štiri različne kolinearne točke $a, b, c, d \in \mathbb{R}P^2$ velja, da natanko ena izmed točk $b, c, d$ tvori s točko $a$ par, ki deli par preostalih dveh točk iz te trojice.

**Izpit iz Geometrije**

(15.6.1999)

1. $A(2, -5)$ in $D(11, 7)$ sta nasproti ležeči oglišči pravilnega šestkotnika $ABCDEF$. Izračunaj koordinate preostalih oglišč in obseg šestkotnika.

2. V $\mathbb{R}^4$ sta s sistemi enačb podana afina podprostora $P_1$ in $P_2$. Poišči premico, ki vsebuje točko $C(-2, 3, -2, -3)$ in seka prostora $P_1$ in $P_2$.

$$P_1: \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= 7 \end{aligned} \qquad P_2: \begin{aligned} 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

3. Naj bodo $A$, $B$, $C$ in $D$ takšne točke iz ravnine, da so poljubne tri med njimi nekolinearne in da je $AB \cong BC \cong CD \cong DA$. Potem pravimo, da te točke tvorijo romb $ABCD$. Daljici $AC$ in $BD$ sta diagonali romba. Pokaži, da se diagonali romba razpolavljata. V dokazu ne smeš uporabiti aksioma o vzporednici.

4. Naj bo $\mathbb{R}P^2 = \{a \leq \mathbb{R}^3 | \dim a = 1\}$ in naj bo $\{P \leq \mathbb{R}^3 | \dim P = 2\}$ množica premic. Naj bodo $a, b, c, d \in \mathbb{R}P^2$ različne kolinearne točke v projektivni ravnini. Potem obstaja tak $P \leq \mathbb{R}^3$, $\dim P = 2$, da so $a, b, c, d \leq P$. Naj bodo $\vec{a} \in a$, $\vec{b} \in b$, $\vec{c} \in c, \vec{d} \in d$ neničelni vektorji. Obstajajo taki $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, da je $\vec{c} = \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b}$ in $\vec{d} = \alpha_2 \vec{a} + \beta_2 \vec{b}$. Predznak produkta $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2$ je odvisen le od $a$, $b$, $c$ in $d$, ne pa od izbranih vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ in $\vec{d}$. Zato lahko definiramo $(a, b)|(c, d) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 < 0$. Pokaži da v $\mathbb{R}P^2$ za relacijo $|$ velja projektiven aksiom urejenosti:

   PU4. Naj bodo $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B$, $C$ različne kolinearne točke. Če $(A_1, A_2)|(B, C)$ in $(A_1, A_3)|(B, C)$ potem $(A_2, A_3) \not| (B, C)$.

1. V $\mathbb{R}^2$ je dan kvadrat s težiščem v $(3,2)$ in enim ogliščem v $(2,5)$. Katera izmed premic $p_1$, premica skozi točki $(-10,8)$ in $(19,3)$, $p_2$, premica z enačbo $9\,x+y=-8$, in $p_3$, premica enačbo $x=-4+19\,t, \quad y=-6+9\,t, \quad t\in\mathbb{R}$, se najbolj približa kvadratu? Kakšna je razdalja med to premico in kvadratom?

2. Poišči afino preslikavo na $\mathbb{R}^3$, ki po vrsti preslika točke $(1,-2,2)$, $(0,3,2)$, $(2,0,-3)$ in $(3,0,1)$ v točke $(3,0,-10)$, $(5,1,0)$, $(8,-1,9)$ in $(11,-2,-3)$. Poišči negibne točke te preslikave.

3. V $\mathbb{R}^4$ poišči tak afin podprostor čim manjše dimenzije, da bo vseboval točko $(3,2,-1,1)$ in da bo sekal afina prostora $P_1$ in $P_2$ podana s sistemi enačb. **Pokaži**, da je to res najmanjši tak prostor.

$$P_1: \begin{array}{rcl} x_1-3\,x_2+2\,x_4 &=& 3\\ -x_2+3\,x_3 &=& 6 \end{array} \qquad P_2: \begin{array}{rcl} 2\,x_1-5\,x_2-3\,x_3+4\,x_4 &=& 3\\ x_1+10\,x_2+3\,x_3+2\,x_4 &=& -10 \end{array}$$

4. Pokaži, da v evklidski ravnini obstaja pet takih točk, da so poljubne tri med njimi nekolinearne. V dokazu uporabi le aksiome povezave in urejenosti ter izreke, ki so izpeljani iz teh aksiomov.

## Izpit iz Geometrije

(7.9.1999)

1. V $\mathbb{R}^3$ so dane štiri premice $p_1: (3,0,1)+t\,(2,5,0);\ t\in\mathbb{R}, \quad p_2: \frac{x-3}{2}=y=\frac{z-2}{3}, \quad p_3$, premica skozi točki $(2,1,7)$ in $(1,1,6)$, in $p_4$, premica ki pod pravim kotom seka ravnino $3\,x-z=5$ v točki $(2,2,1)$.

   Kateri dve premici sta najbližji?

2. V afinem prostoru $\mathbb{R}^5$ poišči premico, ko vsebuje točko $(1,-2,9,-9,-2)$ in seka afina podprostora $P_1$ in $P_2$.

$$P_1: \left.\begin{array}{rcl} x_1 &=& -4-3\,s_1\\ x_2 &=& -2-s_1+s_2\\ x_3 &=& 5+7\,s_1+2\,s_2\\ x_4 &=& -12-3\,s_1+2\,s_2\\ x_5 &=& -2+s_2 \end{array}\right\} s_1,s_2\in\mathbb{R} \qquad P_2: \left.\begin{array}{rcl} x_1 &=& 3-2\,t_2\\ x_2 &=& -1-t_1-2\,t_2\\ x_3 &=& 15+t_1+t_2\\ x_4 &=& -1-2\,t_1-2\,t_2\\ x_5 &=& -7-t_1-2\,t_2 \end{array}\right\} t_1,t_2\in\mathbb{R}$$

3. Poišči vse afine preslikave na afinem prostoru $\mathbb{R}^3$, ki po vrsti preslikajo premice $p_1: (3,-2,1)+t\,(3,-4,5);\ t\in\mathbb{R}$, $p_2: (0,0,1)+t\,(1,-2,2);\ t\in\mathbb{R}$ in $p_3: (0,1,0)+t\,(-1,4,-3)\ t\in\mathbb{R}$ v premice $r_1: (1,0,0)+t\,(2,0,1);\ t\in\mathbb{R}$, $r_2: (1,0,1)+t\,(-3,2,1);\ t\in\mathbb{R}$ in $r_3: (2,3,4)+t\,(1,0,0);\ t\in\mathbb{R}$.

4. Naj bosta $A$ in $B$ različni točki v ravnini. Pokaži da obstaja kot, katerega simetrala je poltrak $[A,B\rangle$.

1. V ravnini $\mathbb{R}^2$ so dane štiri točke: $A$, $B$, $C$ in $D$. Izračunaj polmer trikotniku $ABD$ očrtanega kroga. Na voljo imaš naslednje podatke: štirikotnik $ABCD$ je paralelogram, $\vec{AC} = (3,7)$ in $\vec{BD} = (4,-1)$.

2. Podana sta afina podprostora $P_1$ in $P_2$ v afinem prostoru $\mathbb{R}^4$. Poišči njun presek in unijo.

$$P_1: \left.\begin{array}{rcl} x_1 &=& -3+2\,s-t \\ x_2 &=& 1+9\,s \\ x_3 &=& 8\,s+8\,t \\ x_4 &=& -4+5\,s+t \end{array}\right\} s,t \in \mathbb{R} \qquad P_2: \begin{array}{rcl} 3\,x_1 - x_2 + 2\,x_3 &=& -5 \\ 4\,x_1 - 3\,x_4 &=& 5 \end{array}$$

3. Naj bo $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ afina preslikava, ki preslika točke $(3,-1,0)$, $(6,-2,1)$, $(0,-2,-5)$ in $(0,0,2)$ po vrsti v točke $(4,0,0)$, $(9,-2,4)$, $(-3,-8,-2)$ in $(5,-1,8)$. Poišči njene negibne točke.

4. Naj bodo $A$, $B$ in $C$ nekolinearne točke v evklidski ravnini. Brez uporabe aksioma o vzporednici dokaži da:

   (a) Simetrala kota $\sphericalangle BAC$ seka daljico $BC$. (Pri tem lahko privzameš dejstvo, da del simetrale kota poteka v notranjosti kota.)

   (b) Simetrali kotov $\sphericalangle BAC$ in $\sphericalangle ABC$ se sekata.

   *Nasvet:* Dokaz je mogoč brez uporabe aksiomov o skladnosti in zveznosti.