Kompleksna števila in reševanje algebrskih enačb

Izrek 1. Podmnožica realnih (2x2)-matrik oblike $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ z operacijama matričnega seštevanja in množenja je obseg.

Def. 1: Pod **kompleksnimi števili** razumemo množico $\mathbb{C} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ z računskima operacijama $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$, ki je izomorfna obsegu matrik iz prejšnjega izreka in vsebuje podobseg $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, izomorfen realnim številom $(f : (x, 0) \mapsto x)$.

Posledica 1. Označimo z $i = (0, 1)$ tako imenovano **imaginarno enoto**, za katero velja $i^2 = -1$. Potem je $\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Def. 2: Števili $r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ in $\varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \text{ če je } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{če je } y < 0 \end{cases} \in [0, 2\pi)$ imenujemo **modul** (**absolutna vrednost**) in **argument** kompleksnega števila $z = x + iy$. Pri tem velja $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ oziroma $z = re^{i\varphi}$. Argument števila 0 ni definiran.

Izrek 2. Pri množenju kompleksnih števil se njihovi moduli pomnožijo, argumenti pa seštejejo (po modulu 2π).

Posledica 2 (Moivré). Za poljubno celo število n je $(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$.

Izrek 3. Enačba $z^n = w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$ ima v množici $\mathbb{C}$ natanko n rešitev $z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$, $k = 0, 1, \dots n - 1$.

Def. 3: Množico zaporedij z elementi iz poljubnega kolobarja K in s končnim številom neničelnih členov imenujemo **polinomi ene spremenljivke** nad kolobarjem K. Množica polinomov nad kolobarjem K je tudi sama kolobar, če definiramo operaciji seštevanja in množenja s predpisoma: $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$, $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{c_n\}$, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}$. Z dogovoroma $(1, 0, 0, \dots) = 1$, $(0, 1, 0, 0, \dots) = x$ dobimo za poljuben neničelen polinom $p \in K[x]$ zapis $p = \sum\limits_{k=0}^{n} a_kx^k$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_k \in K$, $a_n \neq 0$. Številu n pravimo **stopnja** polinoma p. Polinomu p z **vodilnim koeficientom** a_n enakim 1, rečemo **unitarni** polinom.

Posledica 3. Kolobar polinomov nad evklidskim kolobarjem je tudi sam **evklidski** - omogoča deljenje z ostankom: $\forall p, q \in K[x]\ \exists!\ k, r \in K[x]\ \ p = kq + r$, kjer je $\deg r < \deg q$ ali $r = 0$.

Def. 4: Unitarnemu polinomu najvišje stopnje, ki deli polinoma p in q, pravimo **največji skupni delitelj** danih polinomov. $\mathrm{D}(p, q)$ lahko določimo z Evklidovim algoritmom.

Def. 5: Elementu $c \in K$ rečemo **ničla** polinoma $p \in K[x]$, kadar je $p(c) = 0$.

Posledica 4. Če je okrajšan ulomek $\frac{c}{d}$ ničla polinoma $p = \sum\limits_{k=0}^{n} a_kx^k \in \mathbb{Z}[x]$, mora $c|a_0$ in $d|a_n$.

Posledica 5 (Bèzout). Element c je ničla polinoma p natanko tedaj, ko je p deljiv z binomom $x - c$. Če je $k \in \mathbb{N}$ najvišja potenca binoma $x - c$, ki deli p, pravimo za c, da je k-kratna ničla polinoma p. Polinom stopnje n nima več kot n ničel (upoštevaje njihovo stopnjo).

Posledica 6. Kadar $c \in K$ predstavlja k-kratno ničlo polinoma p, je c ničla odvoda $p^{(k-1)}$.

Izrek 4. Kvadratna enačba $x^2 + bx + c = 0$; $b, c \in \mathbb{C}$ ima v obsegu $\mathbb{C}$ natanko 2 rešitvi: $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{D_2})$, kjer je **diskriminanta** $D_2 = b^2 - 4c$. V primeru, ko sta $b, c \in \mathbb{R}$, sta rešitvi enačbe realni števili natanko tedaj, ko je $D_2 \geq 0$.