Topologija
Vzorci pisnih izpitov in kolokvijev

23.6.1997

1. Dokažite, da velja
$$\operatorname{Fr}(A \times B) = (\operatorname{Fr} A \times \operatorname{Cl} B) \cup (\operatorname{Cl} A \times \operatorname{Fr} B).$$
(Bolj natančno: če sta X in Y poljubna topološka prostora, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, in če je $X \times Y$ opremljen s produktno topologijo, tedaj velja $\operatorname{Fr}_{X\times Y}(A \times B) = (\operatorname{Fr}_X A \times \operatorname{Cl}_Y B) \cup (\operatorname{Cl}_X A \times \operatorname{Fr}_Y B)$.)

2. Naj bo X topološki prostor, Y Hausdorffov prostor, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, in naj velja $\operatorname{Cl}\{x_0\} = X$. Dokažite, da obstaja natanko ena zvezna funkcija $f : X \longrightarrow Y$, za katero velja $f(x_0) = y_0$.

3. Naj bo $f : X \longrightarrow Y$ funkcija, kjer sta X, Y topološka prostora. Definiramo $h : X \longrightarrow \Gamma_f$ s formulo $\forall x \in X, h(x) = (x, f(x))$. Pri tem je Γ_f graf funkcije f, opremljen z relativno topologijo podedovano iz topološkega produkta $X \times Y$. Dokažite, da je f zvezna natanko takrat, kadar je h homeomorfizem.

4. Dokažite, da kvocientni prostor $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ ne zadošča prvemu aksiomu števnosti.

Pripravil Uroš Milutinović

16.9.1997

1. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Dokažite, da je ta prostor diskreten natanko takrat, kadar velja
$$\forall A \in \mathcal{P}(X), \operatorname{Int} A = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset.$$

2. Naj bo $f : X \longrightarrow Y$ zvezna surjektivna funkcija. Dokažite: če je X separabilen, tedaj je tudi Y separabilen.

3. Naj bo $\mathcal{T}$ topologija na $\mathbf{N}$, ki ima družino $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \ldots\}$ za bazo. Dokažite, da ima v tem prostoru vsaka neprazna podmnožica stekališče in da ta prostor ni kompakten.

4. Naj bo X povezan topološki prostor in $E \subseteq X$ $X \neq \emptyset$. Dokažite, da velja: χ_E je zvezna $\Leftrightarrow$ χ_E je konstanta. Pri tem je χ_E karakteristična funkcija definirana s formulo
$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{če je } x \in E, \\ 0, & \text{če je } x \notin E. \end{cases}$$

Pripravil Uroš Milutinović

6.11.1997

1. Naj bosta $(X, \mathcal{T})$ in $(Y, \mathcal{S})$ topološka prostora. Dokažite, da je funkcija $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ zvezna natanko takrat, kadar velja
$$\forall x \in X, \forall V \in \mathcal{O}(f(x)), f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(x).$$
Pri tem $\mathcal{O}(t)$ označuje množico vseh okolic — ne nujno odprtih! — točke t.

2. Naj bo C gosta, U pa odprta podmnožica topološkega prostora X. Dokažite, da je

$$\operatorname{Cl} U = \operatorname{Cl}(U \cap C).$$

3. Naj K_r označuje množico $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < r\}$. Dokažite, da je

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{R}^2, \emptyset\} \cup \{K_r : r \in \mathbf{R}, r > 0\}$$

topologija na $\mathbf{R}^2$. Določite vsa stekališča zaporedja $x_n = (1 + \frac{1}{n}, 0)$.

4. Naj bo $d : X \times X \longrightarrow \mathbf{R}$ metrika, za katero obstaja pozitivno število m, tako da velja $\operatorname{Im} d \subseteq \{0\} \cup [m, +\infty\rangle$. Dokažite, da d poraja diskretno topologijo.

Pripravil Uroš Milutinović

22.1.1998

1. Naj bo $X = \{0, 1, 2\}$ in $\mathcal{B} = \{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}\}$. Dokažite, da obstaja topologija $\mathcal{U}$, za katero je $\mathcal{B}$ baza, določite $\mathcal{U}$, in dokažite, da $(X, \mathcal{U})$ ni T_1 prostor.

2. Podana je topologija $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbf{N}\} \cup \{\{1, \ldots, n\} : n \in \mathbf{N}\}$ na množici vseh naravnih števil $\mathbf{N}$. Dokažite:

   (a) Prostor $(\mathbf{N}, \mathcal{T})$ ni kompakten.

   (b) Vsaka zvezna funkcija $f : (\mathbf{N}, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ je konstantna, če je prostor $(Y, \mathcal{S})$ Hausdorffov.

3. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ njegov podprostor, in $A \subseteq Y$. Dokažite, da je množica vseh stekališč množice A v $(Y, \mathcal{T}_Y)$ enaka preseku Y z množico vseh stekališč množice A v $(X, \mathcal{T})$.

4. Eksplicitno opišite en homeomorfizem med $A = \{x \in \mathbf{R} : |x| > 0\}$ in $B = \{x \in \mathbf{R} : |x| > 1\}$. Dokažite, da je opisana funkcija dejansko homeomorfizem.

Pripravil Uroš Milutinović

31.8.1998

1. Naj bo U odprta in A poljubna podmnožica topološkega prostora X. Dokažite: iz $U \cap A = \emptyset$ sledi $U \cap (\operatorname{Cl} A) = \emptyset$.

2. Naj bo $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ zvezna funkcija. Dokažite, da je tudi

$$f \times f : (X \times X, \mathcal{U}) \longrightarrow (Y \times Y, \mathcal{V}),$$

podana s formulo

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ (f \times f)(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2)),$$

zvezna, če sta $\mathcal{U}$ (oz. $\mathcal{V}$) produktni topologiji dobljeni iz $\mathcal{T}$ (oz. $\mathcal{S}$).

3. Naj bo X poljubna množica in

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \textit{ je končna množica}\}.$$

Dokažite, da vsaka zvezna funkcija $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{T}_e)$ dosega minimum in maksimum. Pri tem je $\mathcal{T}_e$ evklidska topologija na $\mathbf{R}$. (Opomba: Ni potrebno dokazovati, da je $\mathcal{T}$ topologija.)

4. Dokažite, da sta za poljubni topološki prostor X naslednji trditvi ekvivalentni:

   (a) X je T_1-prostor.

   (b) Diagonala $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ je presek neke družine odprtih podmnožic topološkega produkta $X \times X$.

Pripravil Uroš Milutinović

14.9.1998

1. Naj bo $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ zvezna funkcija. Dokažite, da velja

$$\mathrm{Fr}(f^{-1}(\langle -\infty, 0\rangle)) \subseteq f^{-1}(0).$$

2. Dokažite, da sta $X = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq \pi\}$ in $Y = \langle 0, \pi] \times \{0\}$ homeomorfna podprostora evklidske ravnine $\mathbf{R}^2$.

3. Dokažite, da sta za poljubni topološki prostor X naslednji trditvi ekvivalentni:

   (a) X je diskreten prostor.

   (b) Diagonala $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ je odprta podmnožica topološkega produkta $X \times X$.

4. Naj bo X dobro urejena množica z maksimalnim elementom. Dokažite, da je X, opremljena s topologijo, ki jo poraja ta dobra ureditev, kompakten topološki prostor.

Pripravil Uroš Milutinović

28.10.1998

1. Dokažite: če v topološkem prostoru X obstaja podmnožica A, za katero velja $\mathrm{Cl}\, A = \mathrm{Cl}(X \setminus A) = X$ (oz. velja, da sta množici A in $X \setminus A$ gosti v X), tedaj X nima izoliranih točk.

2. Naj bo X topološki prostor. Dokažite, da sta naslednji trditvi ekvivalentni:

   (a) X je T_1-prostor.

   (b) $\forall x \in X, \displaystyle\bigcap_{\substack{F \text{ je zaprta} \\ x \in F}} F = \{x\}.$

3. Dokažite, da sta X in Y homeomorfna podprostora evklidske ravnine $\mathbf{R}^2$, če je $X = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 4\}$ in $Y = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

4. Naj bo $\{Y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ družina povezanih podprostorov topološkega prostora X. Dokažite: če obstaja povezan podprostor A prostora X, tako da je

$$\forall \lambda \in \Lambda, A \cap Y_\lambda \neq \emptyset,$$

tedaj je

$$A \cup (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda)$$

povezan podprostor prostora X.

Pripravil Uroš Milutinović

25.11.1998

1. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $A \subseteq X$. Dokažite, da sta naslednji trditvi ekvivalentni:
   (a) $A' = A$.
   (b) A je zaprta množica brez izoliranih točk.
2. Dokažite: če sta X_1 in Y_1 homeomorfna in sta X_2 in Y_2 homeomorfna, tedaj sta $X_1 \times X_2$ in $Y_1 \times Y_2$ tudi homeomorfna.
3. Dokažite, da $[0, 1]$ s Sorgenfreyevo topologijo (= z relativno topologijo glede na $\mathbf{R}_l$) ni kompakten.

Pripravil Uroš Milutinović

18.1.1999

1. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Dokažite, da sta naslednji trditvi ekvivalentni:
   (a) $(X, \mathcal{T})$ je diskreten prostor.
   (b) Za poljubno podmnožico $A \subseteq X$ velja $\mathrm{Cl}\, A = X \Rightarrow A = X$.
2. Dokažite, da za poljubni podmnožici $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ velja

$$\mathrm{Int}_X A \times \mathrm{Int}_Y B = \mathrm{Int}_{X \times Y}(A \times B),$$

   če je $X \times Y$ opremljen s produktno topologijo, dobljeno iz X in Y.
3. Dokažite: če je $f : X \longrightarrow Y$ homeomorfizem in $A \subseteq X$ poljubna podmnožica, tedaj je zožitev $f/A : A \longrightarrow f(A)$ tudi homeomorfizem. Opomba: A in $f(A)$ obravnavamo kot podprostora.
4. Naj bo $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ zvezna funkcija iz topološkega prostora $(X, \mathcal{T})$ v Hausdorffov prostor $(Y, \mathcal{S})$. Na množici X definiramo ekvivalenčno relacijo $\sim$ s formulo

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

   Dokažite, da je $X/\sim$ s kvocientno topologijo, dobljeno iz $(X, \mathcal{T})$, tudi Hausdorffov prostor.

Pripravil Uroš Milutinović

9.2.1999

1. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Dokažite, da sta naslednji trditvi ekvivalentni:
   (a) $(X, \mathcal{T})$ je diskreten prostor.
   (b) Za poljubni topološki prostor $(Y, \mathcal{S})$ in za poljubno funkcijo $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ velja, da je le-ta zvezna.

2. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ poljuben topološki prostor in $Y \subseteq X$ poljubna podmnožica. Dokažite: za poljubno podmnožico $A \subseteq Y$ velja

$$\mathrm{Cl}_Y\, A = Y \cap \mathrm{Cl}_X\, A.$$

   Pri tem je Cl_X oznaka za operator zaprtja v $(X, \mathcal{T})$, Cl_Y pa za operator zaprtja v podprostoru $(X, \mathcal{T}_Y)$.

3. Eksplicitno opišite en homeomorfizem iz $(\langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle) \setminus \{(0, 0)\}$ na $(\langle -2, 2\rangle \times \langle -2, 2\rangle) \setminus ([-1, 1] \times [-1, 1])$.

4. Naj bo

$$\mathcal{B} = \{\langle a, b\rangle : a, b \in \mathbf{R},\ a < b, 0 \notin \langle a, b\rangle\} \cup \{\langle a, b\rangle : a, b \in \mathbf{R},\ a < b, \langle -1, 1\rangle \subseteq \langle a, b\rangle\}.$$

   Dokažite, da obstaja topologija $\mathcal{T}$ na $\mathbf{R}$, za katero je $\mathcal{B}$ baza ter da $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ ni Hausdorffov prostor.

Pripravil Uroš Milutinović

17.3.1999

1. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ poljuben topološki prostor, $(Y, \mathcal{S})$ pa diskreten topološki prostor. Dokažite, da za poljubno funkcijo $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ velja, da je zvezna natanko takrat, kadar $\forall y \in Y, f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{T}$.

2. Naj bo $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ Sorgenfreyeva premica z bazo $\{[a, b\rangle : a, b \in \mathbf{R},\ a < b\}$. V tem prostoru določite $\mathrm{Cl}\{1/n : n \in \mathbf{N}\}$ in $\mathrm{Cl}\{-1/n : n \in \mathbf{N}\}$.

3. Eksplicitno opišite en homeomorfizem kvocientnega prostora $S^1/\!\sim$ na S^1, če je $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ in $\sim$ ekvivalenčna relacija definirana s

$$(x, y) \sim (x', y') \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} (x, y) = (x', y') \vee (x, y) = -(x', y').$$

   Ni potrebno dokazovati, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija, vendar dokažite, da je opisana funkcija dejansko homeomorfizem.

4. Naj bo

$$\mathcal{B} = \{\langle a, b\rangle \setminus \mathbf{Q} : a, b \in \mathbf{R},\ a < b\} \cup \{\mathbf{R}\}.$$

   Dokažite, da obstaja topologija $\mathcal{T}$ na $\mathbf{R}$, za katero je $\mathcal{B}$ baza ter da $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ ni Hausdorffov prostor.

Pripravil Uroš Milutinović

16.4.1999 (kolokvij)

1. Naj bo $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$ na X in naj bo $Y \subseteq X$. Dokažite, da je $\{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ baza relativne topologije $\mathcal{T}_Y$.

2. Naj bo X neskončna množica in $\mathcal{U}$ topologija na X, ki ima lastnost, da je vsaka neskončna podmnožica od X odprta v $(X, \mathcal{U})$. Dokažite, da je $\mathcal{U}$ diskretna topologija.

3. Naj bo $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ poljubna funkcija. Dokažite, da sta naslednji trditvi ekvivalentni:

   (a) f je zvezna;

   (b) $\forall B \subseteq Y, \mathrm{Cl}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\mathrm{Cl}\, B)$.

4. Naj bo $\mathcal{U}$ topologija na $\mathbf{R}$, ki ima za bazo družino vseh intervalov $\langle a, b\rangle$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $0 \notin \langle a, b\rangle$ in vseh množic oblike $\langle a, b\rangle \setminus \{1/n : n \in \mathbf{N}\}$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $0 \in \langle a, b\rangle$. Naj bo $\mathcal{T}$ standardna evklidska topologija na $\mathbf{R}$.

   (a) Dokažite: če je $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = -x$, tedaj $f : (\mathbf{R}, \mathcal{U}) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{U})$ ni zvezna.

   (b) Dokažite: če je $\forall x \in \mathbf{R}, g(x) = x$, tedaj je $g : (\mathbf{R}, \mathcal{U}) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{T})$ zvezna bijekcija, ki ni homeomorfizem.

Pripravil Uroš Milutinović

5.5.1999

1. Dokažite, da je vsaki končni T_1-prostor tudi T_2-prostor.

2. Je kompozitum dveh kvocientnih preslikav nujno kvocientna preslikava? Svojo trditev dokažite.

3. Naj bo $\mathcal{U}_\leq$ topologija, ki jo na $\mathbf{Q}$ poraja standardna ureditev $\leq$ racionalnih števil. $\mathcal{T}$ naj bo evklidska topologija na $\mathbf{R}$. Dokažite, da velja

$$\mathcal{U}_\leq = \mathcal{T}_{\mathbf{Q}},$$

   kjer je $\mathcal{T}_{\mathbf{Q}}$ relativna topologija na $\mathbf{Q}$, porojena s $\mathcal{T}$.

4. Naj bo podana poljubna neštevna množica X in na njej topologija števnih komplementov $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : |X \setminus U| \leq \aleph_0\}$. Ugotovite, ali je $(X, \mathcal{T})$ kompakten prostor. Svoj odgovor utemeljite. Opomba: ni potrebno dokazovati, da je $\mathcal{T}$ topologija.

Pripravil Uroš Milutinović

9.6.1999

1. Dokažite, da je $h : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$, definirana s $h(x_1, x_2) = (f(x_1), g(x_2))$, homeomorfizem, če sta $f : X_1 \longrightarrow Y_1$ in $g : X_2 \longrightarrow Y_2$ homeomorfizma.

2. Za vsako od naslednjih trditev ločeno dokažite njeno resničnost, oz. neresničnost.

   (a) Če je $(X, \mathcal{T})$ diskreten, tedaj velja $\forall A \subseteq X,\ A' = \emptyset$.

(b) Če velja $\forall A \subseteq X$, $A' = \emptyset$, tedaj je $(X, \mathcal{T})$ diskreten.

3. Dokažite, da velja
$$\operatorname{Int}_Y A = Y \cap \operatorname{Int}_X(A \cup (X \setminus Y)),$$
kjer je $\operatorname{Int}_Y A$ notranjost množice $A \subseteq Y$ v podprostoru Y prostora X, Int_X pa operator notranjosti v prostoru X.

4. Naj bo podana poljubna neštevna množica X, točka $a \notin X$ ter naj bo $X^* = X \cup \{a\}$. Na X^* množici definiramo topologijo
$$\mathcal{T} = \{Y \cup \{a\} : Y \subseteq X\} \cup \{\emptyset\}.$$
Dokažite, da je $(X^*, \mathcal{T})$ separabilen prostor, ki ne zadošča drugemu aksiomu števnosti. Opomba: ni potrebno dokazovati, da je $\mathcal{T}$ topologija.

Pripravil Uroš Milutinović

23.6.1999

1. Naj bo $\mathcal{P}$ podbaza topologije $\mathcal{T}$ na X. Pokažite, da je $\mathcal{T}$ najmanjša topologija na X, ki vsebuje $\mathcal{P}$ kot podmnožico.

2. Naj bo $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ poljubna funkcija in $c \in X$ poljubna točka. Za vsako od naslednjih trditev ločeno dokažite njeno resničnost, oz. neresničnost.

   (a) Če je f zvezna v točki c, tedaj velja
   $$\forall V \in \mathcal{S},\ (f(c) \in V \ \Rightarrow\ f^{-1}(V) \in \mathcal{T}).$$

   (b) Če velja
   $$\forall V \in \mathcal{S},\ (f(c) \in V \ \Rightarrow\ f^{-1}(V) \in \mathcal{T}),$$
   tedaj je f zvezna v točki c.

3. Dokažite, da je prostor $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ s topologijo podprostora podedovano iz topološkega produkta $X \times X$, homeomorfen X.

4. Dokažite: če je $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ opremljen s topologijo škatlic povezan in neprazen, tedaj je vsak X_λ povezan.

Pripravil Uroš Milutinović

25.8.1999

1. Naj bosta podani poljubna neskončna množica X in topologija končnih komplementov $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{A \in \mathcal{P}(X) : |X \setminus A| < \aleph_0\}$ na X.

   (a) Dokažite, da je $(X, \mathcal{T})$ povezan topološki prostor.

   (b) Dokažite, da je poljubna zvezna funkcija $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{T}_e)$ konstantna.

   Opomba: ni potrebno dokazovati, da je $\mathcal{T}$ topologija.

2. (a) Dokažite, da v poljubnem topološkem prostoru za poljubno množico A velja

$$\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(A))) = \mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(A)).$$

   (b) Najdite protiprimer za enakost $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(A)) = \mathrm{Fr}(A)$.

3. Dokažite, da sta $X = \langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle$ in $Y = \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$ homeomorfna podprostora evklidske premice $\mathbf{R}$.

4. Dokažite: produkt $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ je gost v $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ natanko takrat, kadar je za vsak $\mu \in \Lambda$ množica A_μ gosta v X_μ.

Pripravil Uroš Milutinović

16.11.1999

1. Podan je poljuben topološki prostor $(Y, \mathcal{S})$. Dokažite, da sta naslednji trditvi ekvivalentni:
   (a) $(Y, \mathcal{S})$ je T_1-prostor.
   (b) Za poljubno zvezno funkcijo $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ in za poljubno točko $y \in Y$ je $f^{-1}(y)$ zaprta podmnožica prostora $(X, \mathcal{T})$.

2. (a) Dokažite, da je v poljubnem topološkem prostoru X, za vsako zaporedje $x_n \in X$, $n \in \mathbf{N}$, ki konvergira k $x_0 \in X$, podprostor $A = \{x_n : n \in \mathbf{N}\} \cup \{x_0\}$ kompakten.
   (b) Dokažite: če je X Hausdorffov, tedaj noben neskončni podprostor prostora A, ki ne vsebuje x_0, ni kompakten.

3. Ugotovite, ali je v poljubnem topološkem prostoru X, za poljubni podmnožici $A, B \subseteq X$ res

$$\mathrm{Int}(A \setminus B) = \mathrm{Int}\, A \setminus \mathrm{Cl}\, B.$$

   Če je res, trditev dokažite; če ni, poiščite protiprimer.

4. Naj bo $\mathrm{d} : \mathbf{R}\times\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definirana s formulo $\mathrm{d}(x, y) = |x-y| + |x^2-y^2|$, $x, y \in \mathbf{R}$. Dokažite, da je d metrika, ki poraja evklidsko topologijo na $\mathbf{R}$.

Pripravil Uroš Milutinović

14.12.1999

1. Podana sta poljuben homeomorfizem $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ in poljubna podmnožica $A \subseteq X$. Dokažite, da je tudi zožitev $f|A : (A, \mathcal{T}_A) \longrightarrow (f(A), \mathcal{S}_{f(A)})$ homeomorfizem.

2. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Za poljubni $A \subseteq X$ definiramo $\mathrm{Int}^* A = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}\, A)$. Dokažite, da je $\mathrm{Int}^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{T}$ idempotentna operacija, oz. da velja

$$\forall A \subseteq X,\ \mathrm{Int}^*(\mathrm{Int}^* A) = \mathrm{Int}^* A.$$

3. Naj bo A_λ, $\lambda \in \Lambda$, družina povezanih podprostorov nekega topološkega prostora, za katero velja, da je $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Cl}\, A_\lambda \neq \emptyset$. Dokažite, da je $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Cl}\, A_\lambda$ povezan podprostor, in da podprostor $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ ni nujno povezan.

4. Ugotovite ali je $f : [-1, 2] \longrightarrow [0, 4]$ definirana s formulo $f(x) = x^2$, $x \in \mathcal{D}_f$, kvocientna preslikava.

Pripravil Uroš Milutinović

18.1.2000

1. Dokažite, da za poljubno podmnožico A topološkega prostora velja $\operatorname{Fr}(\operatorname{Int} A) \subseteq \operatorname{Fr} A$.

2. Dokažite, da vsak podprostor prostora, ki zadošča drugemu aksiomu števnosti, tudi sam zadošča drugemu aksiomu števnosti.

3. Funkcija $f : X \longrightarrow Y$ se imenuje *zaprta preslikava*, če je zvezna in če za vsako zaprto množico $F \subseteq X$ velja, da je tudi množica $f(F)$ zaprta v Y. Dokažite: funkcija $f : X \longrightarrow Y$ je zaprta natanko takrat, kadar velja

$$\forall A \subseteq X,\ f(\operatorname{Cl}_X A) = \operatorname{Cl}_Y(f(A)).$$

4. Dokažite: če je A povezan neprazen podprostor evklidskega prostora $\mathbf{R}^2$, tedaj je $|A| = 1$ ali $|A| = c$ ($c = |\mathbf{R}|$).

Pripravil Uroš Milutinović

1.2.2000

1. Naj bo $\mathcal{T}$ topologija končnih komplementov na neskončni množici X (torej $\mathcal{T}$ tvorijo $\emptyset$ in vsi komplementi končnih množic). Ugotovite, ali drži naslednja trditev:

   V $(X, \mathcal{T})$ vsako zaporedje, ki ima neskončno množico vrednosti, konvergira k poljubni točki tega prostora.

   Svoj odgovor utemeljite. Opomba: ni potrebno dokazovati, da je $\mathcal{T}$ topologija.

2. Naj bo $X \times Y$ topološki produkt prostorov X in Y in naj bo $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Dokažite: $A \times B$ je gosta podmnožica $X \times Y$ natanko takrat, kadar je A gosta podmnožica X in B gosta podmnožica Y.

3. Naj bo $f : X \longrightarrow Y$ poljubna funkcija, $\mathcal{S}$ poljubna topologija na Y. Dokažite, da je $\mathcal{T} = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{S}\}$ topologija na X inducirana z $f, Y, \mathcal{S}$ (oz. najmanjša topologija $\mathcal{U}$ na X, za katero je $f : (X, \mathcal{U}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ zvezna).

4. Dokažite: topološki prostor X je nepovezan natanko takrat, kadar obstaja zvezna surjektivna preslikava $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$, kjer je kodomena opremljena z diskretno topologijo.

Pripravil Uroš Milutinović

7.3.2000

1. Dokažite, da za poljubni odprti množici U in V istega topološkega prostora velja

$$U \cap V = \emptyset \ \Rightarrow\ \operatorname{Cl} U \cap \operatorname{Cl} V = \operatorname{Bd} U \cap \operatorname{Bd} V.$$

   Velja ta trditev tudi brez predpostavke, da sta množici U in V odprti?

2. Dokažite, da za vsako množico Y obstaja topologija $\mathcal{S}$, za katero velja, da je za poljubni topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ vsaka funkcija $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ zvezna. Pokažite, da je $\mathcal{S}$ enolično odločena in jo eksplicitno opišite.

3. Dokažite: če je X T_1-prostor brez izoliranih točk in je Y njegova gosta podmnožica, tedaj Y tudi nima izoliranih točk.

4. Naj bo podana poljubna neskončna množica X in na njej topologija končnih komplementov $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : |X \setminus U| < \aleph_0\}$. Ugotovite, ali je $(X, \mathcal{T})$ kompakten prostor. Svoj odgovor utemeljite. Opomba: ni potrebno dokazovati, da je $\mathcal{T}$ topologija.

Pripravil Uroš Milutinović

14.3.2000 (kolokvij)

1. Naj bodo $\mathbf{Q}_+$ pozitivna racionalna števila in naj bo $\mathcal{T}$ družina natanko tistih podmnožic U množice $\mathbf{Q}_+$ za katere velja

$$\forall p, q, a, b \in \mathbf{N},\ D(p,q) = D(a,b) = 1,\ \frac{p}{q} \in U \,\&\, \frac{a}{p}, \frac{b}{q} \in \mathbf{N} \Rightarrow \frac{a}{b} \in U.$$

   (a) Pokažite, da je $\mathcal{T}$ topologija na $\mathbf{Q}_+$.

   (b) Pokažite, da $(\mathbf{Q}_+, \mathcal{T})$ ni T_2 topološki prostor.

2. Naj bo $A = \{\dfrac{t + \sqrt{1+t^2}}{2\sqrt{1+t^2}} (\cos t, \sin t) : t \in \mathbf{R}\}$. Poišči zaprtje množice A v $\mathbf{R}^2$.

3. Naj bo $X = \{(x, y, x^2 + y^2) : x, y \in \mathbf{R}\}$ in $Y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. X je podprostor $\mathbf{R}^3$, Y pa je podprostor $\mathbf{R}^2$. Poišči homeomorfizem $X \longrightarrow Y$.

4. Naj bo $\mathcal{T}_1 = \{U \subseteq \mathbf{R} : |\mathbf{R} \setminus U| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$ topologija končnih komplementov, $\mathcal{T}_2$ pa običajna topologija na $\mathbf{R}$. Poišči vse zvezne preslikave $(\mathbf{R}, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{T}_2)$. Odgovor utemelji!

Pripravil Blaž Lorger

4.4.2000

1. Dokažite:

$$\operatorname{Int} \operatorname{Cl} \operatorname{Int} A = \emptyset \Rightarrow \operatorname{Int} A = \emptyset.$$

2. Naj bo $f : X \longrightarrow Y$ poljubna funkcija, X, Y poljubna topološka prostora. Dokažite, da sta naslednji trditvi ekvivalentni:

   (a) Za poljubno zaprto podmnožico F prostora X velja, da je $f(F)$ zaprta podmnožica prostora Y.

   (b) Za poljubno točko $y \in Y$ in poljubno okolico U množice $f^{-1}(y)$ obstaja okolica V točke y, tako da velja $f^{-1}(V) \subseteq U$.

3. Dokažite, da sta podprostora $\mathbf{N}$ in $\{1/n : n \in \mathbf{N}\}$ evklidske premice homeomorfna.

4. Naj bo X topološki prostor in A njegova podmnožica. Naj bo C povezan podprostor prostora X, ki vsebuje tako točke iz A, kot točke iz $X \setminus A$.

(a) Dokažite, da je $C \cap \operatorname{Fr} A \neq \emptyset$.

(b) Zakaj izbira $X = \mathbf{R}^3$, $A = \{(x,y,0) \in X : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $C = \{(0,0,z) : -1 \leq z \leq 1\}$ **ni** protiprimer za trditev a)?

Pripravil Uroš Milutinović

9.5.2000

1. Dokažite: če sta U in V odprti disjunktni množici, tedaj je

$$(\operatorname{Int}\operatorname{Cl} U) \cap (\operatorname{Int}\operatorname{Cl} V) = \emptyset.$$

2. Naj bo $f : X \longrightarrow Y$ poljubna funkcija, X, Y poljubna topološka prostora. Dokažite, da sta naslednji trditvi ekvivalentni:

   (a) f je zvezna funkcija;

   (b) za poljubno množico $A \subseteq X$ velja $f(A') \subseteq \overline{f(A)}$.

3. Dokažite, da je produkt $S^1 \times \langle 0, +\infty \rangle$ homeomerfen $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

4. Dokažite: če je X kompakten in Y Hausdorffov prostor in če je $f : X \longrightarrow Y$ zvezna surjekcija, tedaj je f kvocientna preslikava.

Pripravil Uroš Milutinović

26.5.2000 (kolokvij)

1. Naj bo X kompakten topološki prostor, $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots$ pa strogo naraščajoče zaporedje kompaktnih podprostorov. Pokaži, da $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ ni nujno kompakten podprostor prostora X.

2. Dana sta topološka prostora $X = [0,1] \times [0,1]$ z evklidsko topologijo in Y, prostor zveznih preslikav $[0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ opremljen s supremum metriko. Pokaži, da je vsaka zvezna preslikava $f : X \longrightarrow Y$ zaprta (slika poljubne zaprte množice je zaprta).

3. Na $\mathbf{R}^2$ je dana ekvivalenčna relacija

$$(x,y) \sim (a,b) \overset{def}{\iff} x - a,\ y - b \in \mathbf{Z}.$$

   Pokaži, da je kvocientni topološki prostor $\mathbf{R}^2/\sim$ homeomorfen $S^1 \times S^1$. Pri tem je $S^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$.

4. $\mathbf{R}^3$ opremimo z evklidsko topologijo, $\mathbf{R}_\ell$ pa naj bo Sorgenfreyeva premica. Pokaži, da ne obstaja surjektivna zvezna preslikava iz $\mathbf{R}^3$ na $\mathbf{R}_\ell$.

Pripravil Blaž Lorger

6.6.2000

1. Dana sta podprostora evklidske ravnine $\mathbf{R}^2$, $X = \langle -1, 1 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle$ in $Y = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$. Pokažite, da sta topološka prostora X in Y homeomorfna.

2. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ poljuben topološki prostor, $(Y, \mathcal{S})$ pa diskreten topološki prostor. Pokažite, da je preslikava $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ zvezna natanko takrat, ko je $\forall y \in Y,\ f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{T}$.

3. Naj bo $X = \mathbf{N} \setminus \{1\}$, za vsak $x \in X$ je $U_x = \{nx : n \in \mathbf{N}\}$, $\mathcal{B} = \{U_2, U_3, U_4, \ldots\}$.

   (a) Pokažite, da je $\mathcal{B}$ baza topologije na X.

   (b) Poiščite vse podmnožice moči 1 v X, ki so v topologiji porojeni z bazo $\mathcal{B}$ zaprte množice.

4. Naj bo $\mathcal{T} = \{U \subseteq \mathbf{R}^2 : (x, y) \in U \Rightarrow (-x, y), (x, -y), (-x, -y) \in U\}$.

   (a) Pokažite, da je $\mathcal{T}$ topologija na $\mathbf{R}^2$.

   (b) Pokažite, da je $\{(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)\}$ zaprta podmnožica prostora $(\mathbf{R}^2, \mathcal{T})$.

   (c) Poiščite kompaktno podmnožico $(\mathbf{R}^2, \mathcal{T})$, ki ni zaprta.

Pripravil Blaž Lorger

20.6.2000

1. Naj bo $S_r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| + |y| < r\}$ in $\mathcal{U} = \{\emptyset, \mathbf{R}^2\} \cup \{S_r : r \in \mathbf{R}_+\}$.

   (a) Pokaži, da je $\mathcal{U}$ topologija na $\mathcal{R}^2$.

   (b) Ali je topološki prostor $(\mathcal{R}^2, \mathcal{U})$ Hausdorffov?

   (c) Poišči zaprtje množice $A = \{(\frac{n}{n+1}, 0) : n \in \mathbf{N}\}$ v topološkem prostoru $(\mathcal{R}^2, \mathcal{U})$.

2. $\mathbf{Q}$ opremimo z evklidsko topologijo. Pokaži, da je topološki prostor racionalnih števil homeomorfen svojemu podprostoru $\mathbf{Q} \cap \langle 0, 1\rangle$.

3. Naj bo X nepovezan topološki prostor, $\mathbf{R}$ pa realna števila z običajno evklidsko topologijo. Poišči kakšno zvezno, nekonstantno, zaprto preslikavo $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$.

4. Naj bo X nekompakten, Y pa kompakten topološki prostor. Katera izmed naslednjih trditev je pravilna?

   (a) Obstaja zvezna surjekcija $X \longrightarrow Y$.

   (b) Ne obstaja zvezna surjekcija $X \longrightarrow Y$.

   (c) Obstoj zvezne surjekcije $X \longrightarrow Y$ je odvisen od konkretnih prostorov X in Y.

   Odgovor utemelji!

Pripravil Blaž Lorger

31.8.2000

1. Naj bo $X = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ in $\mathcal{B} = \{Z_m \times Z_n : m, n \in \mathbf{Z}\}$. Pri tem definiramo $Z_i = \{a \in \mathbf{Z} : a \geq i\}$.

   (a) Pokažite, da je $\mathcal{B}$ baza topologije na X.

   (b) Poiščite zaprtje množice $A = \{(i, i) : i \in \mathbf{Z}\}$ v topologiji, ki jo generira baza $\mathcal{B}$.

2. Dana sta topološka prostora $X = [0, 1] \times \langle -1, 1\rangle \times [0, +\infty\rangle$ in $Y = \mathbf{R} \times \langle 0, 1] \times [-1, 1]$. Poiščite kak homeomorfizem topoloških prostorov X in Y. Pokažite, da je zapisana preslikava res homeomorfizem.

3. Naj bo $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ množica realnih funkcij. Na tej množici sta podani topologiji $\mathcal{T}_1 = \{A \subseteq \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : |\mathbf{R}^{\mathbf{R}} \setminus A| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$ in $\mathcal{T}_2 = \{U_{x,V} : x \in \mathbf{R},\ V \overset{odp.}{\subseteq} \mathbf{R}\}$. Pri tem je $U_{x,V} = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f(x) \in V\}$. Tako dobimo topološka prostora $X = (\mathbf{R}^{\mathbf{R}}, \mathcal{T}_1)$ in $Y = (\mathbf{R}^{\mathbf{R}}, \mathcal{T}_2)$.

   (a) Pokažite, da se v prostoru X poljubni okolici konstantnih preslikav $f \equiv 0$ in $g \equiv 1$ sekata.

   (b) Pokažite, da topološka prostora X in Y nista homeomorfna.

4. Naj bo
$$X = ([0,1] \times \{0,1\}) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\left\{ \frac{1}{i} \right\} \times \left[\frac{1}{i}, 1 \right] \right)$$
podprostor evklidske ravnine. Dokažite ali ovrzite naslednjo trditev: X je povezan topološki prostor.

Pripravil Blaž Lorger

14.9.2000

1. Dane so naslednje družine podmnožic $\mathbf{R}^2$:
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} & = & \{K(a,r) : a \in \mathbf{R}^2,\ r \in \langle 0, \infty \rangle\}, \\ \mathcal{B} & = & \{\overline{K}(a,r) : a \in \mathbf{R}^2,\ r \in [0, \infty \rangle\}, \\ \mathcal{C} & = & \{\overline{K}(a,r) : a \in \mathbf{R}^2,\ r \in \langle 0, \infty \rangle\}. \end{array}$$
Pri tem je $K(a,r) = \{b \in \mathbf{R}^2 : \mathrm{d}(a,b) < r\}$, $\overline{K}(a,r) = \{b \in \mathbf{R}^2 : \mathrm{d}(a,b) \leq r\}$ in $\mathrm{d}(\cdot,\cdot)$ je evklidska metrika na $\mathbf{R}^2$. Katere izmed zgornjih družin so baze kakšne topologije na $\mathbf{R}^2$? Odgovore utemeljite.

2. Za $a \in \mathbf{N}$ naj bo $a\mathbf{N} = \{an : n \in \mathbf{N}\}$. Naravna števila opremimo s topologijo katere baza je družina $\{a\mathbf{N} : a \in \mathbf{N}\}$. V tej topologiji poiščite zaprtje množice vseh praštevil P ($\overline{P} = ?$).

3. Naj bosta $X = \langle 0, 1] \cup \langle 2, \infty \rangle$ in $Y = \langle 0, 1 \rangle \cup [2, \infty \rangle$ topološka podprostora evklidske premice. Poiščite homeomorfizem $f : X \longrightarrow Y$.

4. Naj bo X kompakten topološki prostor, Y poljuben topološki prostor, Z Hausdorffov topološki prostor, $f : X \longrightarrow Y$ kvocientna preslikava in $g : Y \longrightarrow Z$ zvezna, surjektivna preslikava. Če je trditev "*Preslikava $g \circ f$ je kvocientna.*" resnična, jo dokažite, sicer pa poiščite protiprimer.

Pripravil Blaž Lorger

20.11.2000

1. Naj bo X topološki prostor. Dokažite: če obstaja podmnožica A prostora X za katero velja $\mathrm{Cl}(A \setminus \{x\}) = X$ za poljubni $x \in X$, tedaj X nima izoliranih točk.

2. Naj bo $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U$ je končna množica$\}$. Dokažite, da je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ separabilen (pri tem ni potrebno dokazovati, da je $\mathcal{T}$ topologija).

3. Naj bo X povezan in Y poljuben topološki prostor ter $f : X \longrightarrow Y$ zvezna funkcija. Dokažite, da je graf $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ povezan podprostor produkta $X \times Y$.

4. Naj bo $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ poljubna zvezna funkcija. Dokažite, da sta naslednji trditvi ekvivalentni:

   (a) f je zaprta (oz. za poljubno zaprto podmnožico F prostora X velja, da je $f(F)$ zaprta podmnožica prostora Y);

   (b) za poljubni množici $G \subseteq Y$ in $U \in \mathcal{T}$ velja

$$f^{-1}(G) \subseteq U \Rightarrow (\exists V \in \mathcal{S}, G \subseteq V \,\&\, f^{-1}(V) \subseteq U).$$

Pripravil Uroš Milutinović

25.1.2001

1. Naj bo X poljuben T_1-prostor. Dokažite, da je za poljubno podmnožico $F \subseteq X$ odvod F' te množice zaprt v X.

2. Naj bo (X, d) metričen prostor. Dokažite, da je $\mathrm{d} : X \times X \longrightarrow \mathbf{R}$ zvezna, če $X \times X$ opremimo s produktno topologijo dobljeno iz $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{d}})$, $\mathbf{R}$ pa z evklidsko topologijo.

3. Naj bo X množica vseh iracionalnih števil z relativno topologijo dobljeno iz evklidske topologije na $\mathbf{R}$. Poiščite števno gosto podmnožico od X in dokažite tako njeno števnost, kot to, da je gosta.

4. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ kompakten Hausdorffov prostor, $\mathcal{S}$ pa poljubna topologija na X, za katero velja $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ in $\mathcal{S} \neq \mathcal{T}$. Dokažite, da je $(X, \mathcal{S})$ kompakten prostor, ki ni Hausdorffov.

Pripravil Uroš Milutinović

14.2.2001

1. Naj bo $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}\}$ podana topologija na množici $X = \{1,2,3,4,5\}$. Določite zaprtja množic $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$, $D = \{4\}$, $E = \{5\}$ v topološkem prostoru $(X, \mathcal{T})$.

2. Dokažite, da sta podprostora $X = \{(x, y) : y > 0\}$ in $Y = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ evklidske ravnine homeomorfna.

3. Naj bo množica $X = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\}$ opremljena s topologijo podprostora evklidske premice. Dokažite, da poljubna zvezna funkcija $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ dosega minimum in maksimum. Poiščite primer (nezvezne) funkcije $g : X \longrightarrow \mathbf{R}$, ki ne dosega ne minimuma, ne maksimuma.

4. Dokažite, da je poljubna odprta podmnožica evklidske premice unija neke števne družine paroma disjunktnih odprtih intervalov. (Opomba: le-ti so lahko neomejeni.)

Pripravil Uroš Milutinović

2.3.2001 (kolokvij)

1. Naj bo X poljubna množica in $a \in X$ njena poljubna točka. Pokažite, da je tedaj $\mathcal{T} = \{U \subseteq X : a \notin U\} \cup \{X\}$ topologija na X. Poiščite še notranjost množice A, če je A poljubna podmnožica množice X, ki vsebuje točko a.

2. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, množica $Y \subseteq X$ pa opremljena z relativno topologijo, podedovano od X. Pokažite, da je množica $Z \subseteq Y$ zaprta natanko takrat, ko obstaja množica F, ki je zaprta podmnožica prostora $(X, \mathcal{T})$, tako da velja $Z = F \cap Y$.

3. Naj bo $X = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 5\}$ in $Y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. X je podprostor prostora $\mathbf{R}^2$, Y pa $\mathbf{R}^2$. Ali sta prostora X in Y homeomorfna?

4. Naj bo množica $X = [0, 1] \times [0, 1]$ opremljena s topologijo, ki jo poraja leksikografska ureditev. Določite zaprtje množice $A = \{(x, \frac{1}{2}) : 0 < x < 1\} \subseteq X$.

Pripravila Irena Hrastnik

27.3.2001

1. Naj bo X topološki prostor, ki zadošča 1. aksiomu števnosti. Pokažite, da poljubna točka $x \in X$ ima bazo okolic $\{U_n : n \in \mathbf{N}\}$, za katero velja $U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \cdots$.

2. Podana je topologija $\mathcal{T} = \{U \cup \{0\} : U \subseteq \mathbf{R}\} \cup \{\emptyset\}$ na $X = \mathbf{R}$. Naj bo $Y = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

   (a) Dokažite: $\mathrm{Cl}_{(X,\mathcal{T})}\{0\} = X$.

   (b) Dokažite, da je $(X, \mathcal{T})$ separebilen topološki prostor, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ pa ni. (Opomba: ni potrebno dokazovati, da je $\mathcal{T}$ topologija.)

3. Naj bo X poljuben topološki prostor. Dokažite, da je X T_1-prostor natanko takrat, ko je za poljubno točko $x \in X$ množica $\{x\} \times X$ zaprta v $X \times X$.

4. Naj bo $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{T} : a \in U \Leftrightarrow b \in U\}$, kjer je $\mathcal{T}$ evklidska topologija na $X = [a, b]$. Dokažite, da je $(X, \mathcal{U})$ kompakten topološki prostor, ki pa ni Hausdorffov.

Pripravil Uroš Milutinović

8.5.2001

1. Podana sta topološka prostora $(X, \mathcal{T})$ in $(Y, \mathcal{S})$. Dokažite, da je

$$\mathcal{D} = \{B \times C : B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}$$

baza produktne topologije na $X \times Y$, dobljene iz $\mathcal{T}$ in $\mathcal{S}$, če je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$, $\mathcal{C}$ pa baza topologije $\mathcal{S}$.

2. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, A in B pa zaprti podmnožici tega prostora, $X = A \cup B$. Dokažite, da je $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ zvezna, če sta zvezni funkciji $f/A : (A, \mathcal{T}_A) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$, $f/B : (B, \mathcal{T}_B) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$.

3. Naj bo F navzgor omejena neprazna podmnožica $\mathbf{R}$, ki je zaprta v evklidski topologiji. Dokažite, da F ima maksimum.

4. Dokažite, da sta za podani topološki prostor X naslednji trditvi ekvivalentni:

   (a) X je povezan;

   (b) Za poljubno zvezno funkcijo $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ velja, da je $f(X)$ konveksna podmnožica $\mathbf{R}$.

Pripravil Uroš Milutinović

30.5.2001 (kolokvij)

1. Dokažite: prostor $(X, \mathcal{T})$ je T_1-prostor natanko tedaj, ko je vsaka končna podmnožica tega prostora zaprta.

2. Naj bo $g : \mathbf{R} \longrightarrow [0, \infty\rangle$ definirana s formulo $g(x, y) = x^2 + y^2$. Pokažite, da je g kvocientna preslikava.

3. Naj bo $\mathcal{T}$ topologija na $X = \mathbf{N} \setminus \{1\}$, ki ima družino $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in X}$, kjer je za vsak $n \in X$, $B_n = \{k \in X : k \mid n\}$, za bazo. Ali je $(X, \mathcal{T})$ kompakten prostor? (Da obstaja topologija $\mathcal{T}$, za katero je $\mathcal{B}$ baza, ni potrebno dokazovati.)

4. Naj bo $X = [-1, 0\rangle \cup \langle 0, 1]$ podprostor evklidske premice in Y povezani podprostor prostora X. Pokažite, da je tedaj Y vsebovana v natanko enem izmed intervalov $[-1, 0\rangle$, $\langle 0, 1]$.

Pripravila Irena Hrastnik

7.6.2001

1. Pokažite, da velja $\mathrm{Bd}(\mathrm{Cl}\, A) \subseteq \mathrm{Bd}\, A$.

2. Naj bosta $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ in $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ zvezni, odprti preslikavi. Pokažite, da je tedaj tudi $f : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ definirana s predpisom $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ zvezna in odprta.

3. Množico $X = [-1, 1]$ opremimo s topologijo
$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X : \langle -1, 1\rangle \subseteq U \vee 0 \notin U\}.$$
Ali je $(X, \mathcal{T})$ T_1-prostor?

4. Ali je prostor $X = \{(x, \frac{1}{x} \sin x) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\} \cup \{(0, 1)\}$ povezan s potmi?

Pripravila Irena Hrastnik

28.6.2001

1. Naj bo $X = \mathbf{N} \setminus \{1\}$. Pokažite, da je $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in X}$, kjer je $B_n = \{k \in X : k \mid n\}$, za vsak $n \in X$, baza neke topologije na X.

2. Naj bo A poljubna podmnožica topološkega prostora X in naj bo $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ definirana z naslednjim predpisom:
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A, \\ 1, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$
Dokažite, da je f zvezna natanko takrat, ko je A odprta in zaprta v X.

3. Naj bo Y poljubna podmnožica topološkega prostora X. Pokažite, da če je $\mathrm{Int}(X \setminus Y) = \emptyset$, potem je Y gosta v X.

4. Na $\mathbf{R}^2$ definiramo ekvivalenčno relacijo s predpisom $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Pokažite, da je prostor $\mathbf{R}^2/\!\sim$ homeomorfen prostoru $\mathbf{R}$.

Pripravila Irena Hrastnik

30.8.2001

1. Naj bo $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d,e\}\}$ topologija na množici $X = \{a,b,c,d,e\}$. V topološkem prostoru $(X, \mathcal{T})$ poiščite zaprtja množic $X_1 = \{a\}$, $X_2 = \{c\}$, $X_3 = \{e\}$, $X_4 = \{a,b\}$ in $X_5 = \{c,d\}$.

2. Realna števila opremimo s topologijo $\mathcal{T} = \{\langle a, +\infty\rangle : a \in \mathbf{R}\}$. Zapišite množico limit in množico stekališč zaporedja $x_n = \dfrac{1}{n}$.

3. Naj bosta $f : X \longrightarrow Y$ in $g : Y \longrightarrow Z$ zvezni funkciji, taki da je funkcija $g \circ f$ odprta. Dokažite, da če je f surjektivna, tedaj je g odprta.

4. Naj bo X končna množica in d metrika na X. Naj bo $\mathcal{T}$ topologija na X, za katero velja $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\mathrm{d}}$ in $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}_{\mathrm{d}}$. Dokažite, da je $(X, \mathcal{T})$ kompakten prostor, ki ni Hausdorffov.

Pripravila Irena Hrastnik

13.9.2001

1. Naj bo $X \neq \emptyset$ poljubna množica, $f : X \longrightarrow Y$ poljubna funkcija in $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostor. Pokažite, da je tedaj $\mathcal{T} = \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{S}\}$ topologija na X.

2. Naj bo X topološki prostor. Naj bo Y odprta, Z pa poljubna podmnožica X. Dokažite, da tedaj velja $Y \cap \mathrm{Cl}(Z) \subseteq \mathrm{Cl}(Y \cap Z)$.

3. Naj bo funkcija $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definirana na naslednji način:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1, \\ 2x+1, & x > 1. \end{cases}$$

   Pokažite, da f ni zvezna, če domeno in kodomeno opremimo z evklidsko topologijo, in je zvezna, če domeno in kodomeno opremimo z desno Sorgenfreyevo topologijo.

4. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Naj za vsaka dva elementa $x, y \in X$ obstaja taka povezana množica A, da je $x, y \in A$. Dokažite, da je tedaj prostor $(X, \mathcal{T})$ povezan.

Pripravila Irena Hrastnik

17.1.2002

1. Naj bo $X = \{0\} \cup \{\pm\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$ podprostor evklidske premice $\mathbf{R}$. Pokažite, da je X kompakten prostor.

2. Naj bosta X in Y poljubna topološka prostora in $f : X \longrightarrow Y$ poljubna zvezna funkcija. Pokažite, da tedaj za vsako podmnožico $A \subseteq X$ velja $f(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \mathrm{Cl}(f(A))$.

3. Naj bo množica $X = [-1, 1] \times [0, 1]$ opremljena s topologijo, ki jo poraja leksikografska ureditev. Določite zaprtje množice $A = \{(\frac{1}{n^2}(-1)^n, 0) : n \in \mathbf{N}\} \subseteq X$.

4. Za naravni števili a in b naj bo $U_{a,b}$ naslednja podmnožica $\mathbf{N}$: $U_{a,b} = \{an + b : n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$. Pokažite, da je družina $\mathcal{B} = \{U_{a,b} : a, b \in \mathbf{N},\ \mathrm{D}(a,b) = 1\}$ baza neke topologije na $\mathbf{N}$.

Pripravila Irena Hrastnik

5.2.2002 (kolokvij)

1. Naj bo $X = [-2, \infty\rangle$ in $\mathcal{T} = \{U \subseteq X : \langle -2, 2\rangle \subseteq U \vee 0 \notin U\}$. Pokažite, da je $\mathcal{T}$ topologija na X.

2. Naj bo A poljubna neštevna množica, $b \notin A$ in $X = A \cup \{b\}$. Množico X opremimo s topologijo $\mathcal{T} = \{U \subseteq X : b \notin U \vee A \setminus U$ je števna$\}$. Naj bo $i : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{S})$, kjer je $\mathcal{S}$ diskretna topologija, identična preslikava. Pokažite, da i ni zvezna. Kaj lahko poveste o zveznosti inverzne funkcije i^{-1}? Dokažite svojo trditev. Opomba: da je $\mathcal{T}$ topologija, ni potrebno dokazovati.

3. Pokažite, da nobena števna podmnožica standardne baze $\mathcal{B}_l = \{[a, b\rangle : a, b \in \mathbf{R}, a < b\}$ Sorgenfreyeve premice ni baza Sorgenfreyeve premice.

4. Pokažite, da sta krožnica S^1 in množica $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$ homeomorfna podprostora evklidske ravnine $\mathbf{R}^2$.

Pripravila Irena Hrastnik

5.2.2002

1. Naj bo $X = \{a, b, c, d\}$ in $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$. Pokažite, da obstaja topologija $\mathcal{T}$ za katero je $\mathcal{B}$ baza in jo določite. Ali je množica $\{b, c, d\}$ zaprta v $(X, \mathcal{T})$? Dokažite.

2. Dokažite, da je evklidska premica homeomorfna odprtemu intervalu $\langle 0, 3\rangle$, ki ga prav tako opremimo z evklidsko topologijo.

3. Naj bo X neskončna množica in $\mathcal{T} = \{U \subseteq X : U = \emptyset \vee X \setminus U$ je končna$\}$ topologija na X. Pokažite, da prostor $(X, \mathcal{T})$ ni Hausdorffov prostor, je pa T_1-prostor. Opomba: da je $\mathcal{T}$ topologija, ni potrebno dokazovati.

4. Naj bo X povezan topološki prostor in $A \subseteq X$ taka odprta množica, da je $\mathrm{Fr}\, A$ povezan podprostor. Pokažite, da je tedaj podprostor $X \setminus A$ povezan.

Pripravila Irena Hrastnik

11.4.2002

1. Naj bo $\mathcal{B} = \{\langle a, b\rangle \setminus \mathbf{Q} : a, b \in \mathbf{R},\ a < b\} \cup \{\mathbf{R}\}$. Dokažite, da obstaja topologija $\mathcal{T}$ na $\mathbf{R}$, za katero je $\mathcal{B}$ baza.

2. Naj bo X poljubna množica, $a \in X$ poljubna točka in $\mathcal{T} = \{U \subset X : a \notin U\} \cup \{X\}$ topologija na X. Poiščite zaprtje in izolirane točke množice Y v topološkem prostoru $(X, \mathcal{T})$, če je Y poljubna podmnožica množice X.

3. Naj bo X neskončna množica in $\mathcal{T} = \{U \subseteq X : U = \emptyset \vee X \setminus U$ je končna$\}$ topologija na X. Pokažite, da je vsaka neskončna podmnožica množice X gosta v $(X, \mathcal{T})$.

4. Pokažite, da je enotska krogla $B^3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ povezana s potmi. Ali je krogla $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \leq \varepsilon\}$, če je (x_1, y_1, z_1) točka iz $\mathbf{R}^3$, ε pa pozitivno realno število, povezana s potmi? (Odgovor utemeljite.)

Pripravila Irena Hrastnik

23.5.2002 (kolokvij)

1. Naj bo X poljuben topološki prostor in $Y \subseteq X$ njegov podprostor. Pokažite, da če obstajata taki odprti množici U in V v X, da je $Y \subseteq U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $U \cap Y \neq \emptyset$ in $V \cap Y \neq \emptyset$, tedaj je Y nepovezan prostor.

2. Realna števila opremimo s topologijo $\mathcal{T}$ z bazo $\mathcal{B} = \{\langle -a, a\rangle : a \in \mathbf{R}\}$. Pokažite, da je interval $\langle 0, 1]$ kompakten podprostor prostora $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$.

3. Na množici $X = ([-1,2]\times\{0\})\cup([0,1]\times\{1\})$ definirajmo ekvivalenčno relacijo $\sim$ s predpisom $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Pokažite, da je kvocientni prostor $X/\sim$ homeomorfen prostoru $[-1, 2]$.

4. Naj bo X poljuben topološki prostor v katerem velja, da je $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ presek neke družine odprtih podmnožic topološkega produkta $X \times X$. Pokažite, da je X tedaj T_1-prostor.

Pripravila Irena Hrastnik

11.6.2002

1. Naravna števila opremimo s topologijo $\mathcal{T} = \{U_n : n \in \mathbf{N}\} \cup \{\emptyset\}$, kjer za poljubno naravno število n velja $U_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\} \subseteq \mathbf{N}$. Zapišite množico vseh stekališč množice $A = \{4, 13, 28, 37\}$ in zaprtje množice A (da je $\mathcal{T}$ topologija na $\mathbf{N}$ ni potrebno dokazovati).

2. Pokažite, da je vsak podprostor T_1-prostora tudi T_1-prostor.

3. Naj bo X poljuben topološki prostor, $K \subseteq X$ kompakten podprostor in $Z \subseteq X$ zaprta množica. Trditev, da je $K \cap Z$ kompakten podprostor prostora X dokažite, za nepravilno trditev "Množica $K \cap Z$ je zaprta v X" pa najdite protiprimer.

4. Pokažite, da če je $\mathcal{P}$ podbaza za topologiji $\mathcal{T}$ in $\mathcal{T}'$ na X, tedaj je $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

Pripravila Irena Hrastnik

28.6.2002

1. Pokažite: če je $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ nezvezna funkcija, $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}$ ter $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_1$, tedaj je tudi $f : (X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (Y, \mathcal{S}_1)$ nezvezna funkcija.

2. Naj bo X diskreten topološki prostor in $Y \subseteq X$ neskončen podprostor. Pokažite, da Y ni kompakten.

3. Naj bo X opremljen s topologijo
$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X : U = \emptyset \vee X \setminus U \text{ je končna množica}\}.$$
Pokažite, da je $(X, \mathcal{T})$ separabilen topološki prostor.

4. Pokažite, da sta $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \times \mathbf{R}$ in $Y = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1\}$ homeomorfna podprostora evklidskega prostora $\mathbf{R}^3$.

Pripravila Irena Hrastnik

29.8.2002

1. Naj bo X poljubna množica in $X^* = X \cup \{a\}$, $a \notin X$. Dokažite, da je $\mathcal{T} = \{Y \cup \{a\} : Y \subseteq X\} \cup \{\emptyset\}$ topologija na X^* ter da je topološki prostor $(X^*, \mathcal{T})$ separabilen.

2. Naj bo $F \neq \emptyset$ zaprta omejena podmnožica evklidske premice $\mathbf{R}$. Dokažite:
   (a) Obstaja najmanjši zaprti interval, ki vsebuje F.
   (b) Če je $[a,b]$ najmanjši zaprti interval, ki vsebuje F, tedaj je $[a,b] \setminus F$ odprta podmnožica $\mathbf{R}$.

3. Bodita $(X, \mathcal{T})$ in $(X, \mathcal{S})$ topološka prostora za katera velja $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$. Dokažite: če zaporedje x_n konvergira k L glede na topologijo $\mathcal{S}$, tedaj x_n konvergira k L tudi glede na topologijo $\mathcal{T}$.

4. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ poljuben topološki prostor in $X = Y \cup Z$. Dokažite: če sta podprostora $(Y, \mathcal{T}_Y)$ in $(Z, \mathcal{T}_Z)$ kompaktna, tedaj je kompakten tudi $(X, \mathcal{T})$.

Pripravil Uroš Milutinović

12.9.2002

1. Zunanjost $\operatorname{Ext}(A)$ množice $A \subseteq X$ v topološkem prostoru $(X, \mathcal{T})$ definiramo s formulo $\operatorname{Ext}(A) = \operatorname{Int}(X \setminus A)$. Dokažite:
   (a) $\operatorname{Ext}(A \cup B) = (\operatorname{Ext}(A)) \cap (\operatorname{Ext}(B))$;
   (b) $A \cap \operatorname{Ext}(A) = \emptyset$.

2. Dokažite: če sta X in Y separabilna topološka prostora, tedaj je tudi topološki produkt $X \times Y$ separabilen.

3. Naj bo X povezan podprostor Sorgenfreyeve premice. Dokažite, da velja $|X| \leq 1$.

4. Bodita X in Y topološka prostora. Naj bo $f : X \longrightarrow Y$ funkcija (ne nujno zvezna), ki ima kompakten graf $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ (s topologijo podprostora kartezičnega produkta $X \times Y$). Dokažite:
   (a) X je kompakten.
   (b) Če je X Hausdorffov, tedaj je f zvezna.

Pripravil Uroš Milutinović

29.1.2003

1. Naj bo X T_1-prostor brez izoliranih točk in naj bo $Y \subseteq X$ njegova gosta podmnožica. Dokažite, da Y nima izoliranih točk.

2. Bodita $\mathcal{T}$ in $\mathcal{S}$ topologiji na x. Dokažite:

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall A \subseteq X, \operatorname{Cl}_{\mathcal{S}} A \subseteq \operatorname{Cl}_{\mathcal{T}} A.$$

3. Podan je kompakten prostor $X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\}$ z evklidsko topologijo (oz. X je podprostor evklidske premice). On je pokrit z družino odprtih intervalov $\mathcal{U} = \{\langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle, \langle 1-\varepsilon, 1+\varepsilon\rangle, \langle \frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1+\varepsilon}{2}\rangle, \langle \frac{1-\varepsilon}{4}, \frac{1+\varepsilon}{4}\rangle, \dots, \langle \frac{1-\varepsilon}{2^n}, \frac{1+\varepsilon}{2^n}\rangle, \dots\}$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Določite neko končno podmnožico družine $\mathcal{U}$, ki pokriva X.

4. Naj bodo $Y_n \subseteq X$, $n \in \mathbf{N}$, povezani podprostori topološkega prostora X, za katere velja

$$\forall n \in \mathbf{N}, Y_n \cap Y_{n+1} \neq \emptyset.$$

Dokažite, da je $Y = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} Y_n$ tudi povezan podprostor.

Pripravil Uroš Milutinović

12.2.2003

1. Dokažite: $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ je zvezna natanko takrat, kadar za poljubno množico $B \subseteq Y$ velja $\operatorname{Cl} f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(\operatorname{Cl} B)$.

2. Naj bo Y topološki podprostor prostora X. Dokažite, da za poljubno podmnožico $A \subseteq Y$ velja

$$\operatorname{Int}_Y A = Y \cap \operatorname{Int}(A \cup (X \setminus Y)),$$

kjer je Int_Y operator notranjosti na prostoru Y, Int pa na prostoru X.

3. Naj bo X T_1-prostor, $A \subseteq X$, $x \in X$. Dokažite, da je x stekališče množice A natanko takrat, kadar je za vsako odprto okolico U točke x množica $U \cap A$ neskončna.

4. Naj bo $f : X \longrightarrow Y$ poljubna zvezna funkcija, X in Y pa poljubna kompaktna metrična prostora. Dokažite, da sta naslednji trditvi ekvivalentni:

   (a) f je zvezna;

   (b) graf $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ funkcije f je zaprta podmnožica topološkega produkta $X \times Y$.

Pripravil Uroš Milutinović

21.2.2003 (kolokvij)

1. Naj bosta podprostora X in Y evklidske ravnine $\mathbf{R}^2$ podana z naslednjima predpisoma:

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\},$$

$$Y = [0, \sqrt{2}] \times [0, \sqrt{2}].$$

Eksplicitno poiščite homeomorfizem med X in Y.

2. Dokažite ali s protiprimerom ovrzite naslednjo trditev!

Naj bo X topološki prostor ter A in B njegovi podmnožici. Potem je

$$\operatorname{Cl}(A) \setminus \operatorname{Int}(B) = \operatorname{Cl}(A \setminus \operatorname{Int}(B)).$$

3. Naj bosta X topološki prostor in Y Hausdorffov prostor. Naj bodo $f, g : X \longrightarrow Y$ in $h : Y \longrightarrow Y$ zvezne preslikave.

(a) Pokažite, da je množica $E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ zaprta v X. Namig: Pokažite, da je E^c odprta v X.

(b) Pokažite, da je množica $F = \{x \in Y : h(x) = x\}$ zaprta v Y.

4. V ravnini $\mathbf{R}^2$ naj bo podana relacija $\prec$ takole:

$$(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 < x_2) \text{ ali } (x_1 = x_2 \text{ in } y_1 < y_2).$$

Naj bo $U_{a,b} = \{x \in \mathbf{R}^2 : a \prec x \prec b\}$ in $\mathcal{B} = \{U_{a,b} : a \prec b\}$ baza neke topologije $\mathcal{T}$ na $\mathbf{R}^2$ (da obstaja takšna topologija, za katero je $\mathcal{B}$ baza, ni potrebno dokazovati).

(a) Ali topološki prostor $(\mathbf{R}^2, \mathcal{T})$ zadošča separacijskemu aksiomu T_2?

(b) Pokažite, da je $(\mathbf{R}^2, \mathcal{T})$ 1-števen!

Pripravil Iztok Banič

22.4.2003

1. Dokažite, da za poljubni zaprti podmnožici A, B topološkega prostora X velja

$$\operatorname{Int}(A \cup B) \subseteq (\operatorname{Int} A) \cup (\operatorname{Int} B) \cup (A \cap B).$$

2. Naj bo X separabilen topološki prostor. Dokažite, da je množica izoliranih točk prostora X števna.

3. Bodita X in Y kompaktna podprostora evklidskega prostora $\mathbf{R}^n$. Dokažite, da je $X + Y = \{x+y : x \in X,\ y \in Y\}$ kompakten podprostor prostora $\mathbf{R}^n$ in da je $XY = \{xy : x \in X,\ y \in Y\}$ kompakten podprostor evklidske premice $\mathbf{R}$. Pri tem je $x + y$ vsota, xy pa skalarni produkt vektorjev x, y.

4. Naj bo $\{A_\alpha : \alpha \in A\}$ družina povezanih podprostorov topološkega prostora X in naj bo B povezan podprostor prostora X, ki ima neprazen presek z vsako množico A_α. Dokažite, da je povezan tudi podprostor

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha\right) \cup B.$$

Pripravil Uroš Milutinović

30.5.2003 (kolokvij)

1. Naj bo X topološki prostor in G gosta podmnožica v X. Dokažite ali s protiprimerom ovrzite:

(a) Za poljubno podmnožico $U \subseteq X$ velja $U \subseteq \operatorname{Cl}(U \cap G)$.

(b) Za poljubno odprto podmnožico U v X velja $U \subseteq \operatorname{Cl}(U \cap G)$.

2. Glejmo na $\mathbf{N}$ in $\mathbf{Q}$ kot na podprostora evklidske premice $\mathbf{R}$. Poiščite vse kompaktne podprostore v $\mathbf{N}$. Poiščite primer takega podprostora v $\mathbf{Q}$, ki ni končen, je pa kompakten. Odgovore utemeljite.

3. Naj bo na $\mathbf{R}$ definirana topologija $\tau = \{\emptyset\} \cup \{I_a : a \in \mathbf{R}\} \cup \{\mathbf{R}\}$, kjer je $I_a = \{x \in \mathbf{R} : x > a\}$ (da je τ topologija na $\mathbf{R}$, ni potrebno dokazovati). Dokažite, da je prostor $(\mathbf{R}, \tau)$ povezan in da ne obstaja zvezna surjekcija iz $(\mathbf{R}, \tau)$ na Sorgenfreyevo premico.

4. Naj bo podan podprostor $E = (\mathbf{N} \times \mathbf{R}) \cup (\mathbf{R} \times \{0\})$ evklidske ravnine $\mathbf{R}^2$ in relacija $\sim$ na E:
$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow (y_1 = y_2 = 0) \text{ ali } (x_1, y_1) = (x_2, y_2).$$
Pokažite, da prostor $E/\sim$ ni 1-števen. Ali je prostor $E/\sim$ povezan?

Pripravil Iztok Banič

13.6.2003

1. Pokažite, da prostora $B^3 = \{x \in \mathbf{R}^3 : |x| \leq 1\}$ in $B^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ nista homeomorfna.

2. Naj bo $X = [0,1] \cap \mathbf{Q}$ podprostor evklidske premice $\mathbf{R}$.
   (a) Poiščite kako odprto pokritje prostora X, ki nima končnega podpokritja.
   (b) Pokažite, da prostor X ni povezan.
   (c) Poiščite kako topologijo na X, ki ni indiskretna, tako da bo X, opremljen s to topologijo, povezan in kompakten topološki prostor.

3. Naj bosta X in Y lokalno povezana topološka prostora. Pokažite, da je potem tudi produkt $X \times Y$ lokalno povezan topološki prostor.

4. Naj bo na evklidski premici $\mathbf{R}$ podana ekvivalenčna relacija $\sim$ takole:
$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}.$$
Pokažite, da je $\mathbf{R}/\sim$ homeomorfen prostoru $S^1 = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| = 1\}$.

Pripravil Iztok Banič

4.7.2003

1. Naj bo $X = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ in $\mathcal{B} = \{D_a : a \in \mathbf{R}\} \cup \{\langle b, c\rangle : b, c \in \mathbf{R}\}$, kjer za poljubne $a, b, c \in \mathbf{R}$ definiramo $D_a = \{x \in \mathbf{R} : x > a\} \cup \{\infty\}$ in $\langle b, c\rangle = \{x \in \mathbf{R} : b < x < c\}$.
   (a) Pokažite, da je $\mathcal{B}$ baza neke topologije $\mathcal{T}$ na X.
   (b) Pokažite, da je prostor $(X, \mathcal{T})$ homeomorfen podprostoru $Y = \langle -1, 1]$ evklidske premice $\mathbf{R}$.

2. Naj bo $X = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathbf{Z} \text{ ali } y \in \mathbf{Q}\}$ podprostor evklidske ravnine. Katere od lastnosti povezanost, lokalna povezanost, povezanost s potmi ima topološki prostor X? Odgovore utemeljite!

3. Naj bo X množica, $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostor in $f : X \longrightarrow Y$ surjektivna funkcija.
   (a) Poiščite najmanjšo topologijo $\mathcal{T}$ na X, tako da bo funkcija $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ zvezna. Odgovor utemeljite!
   (b) Pokažite, da je $(X, \mathcal{T})$ kompakten, če je prostor $(Y, \mathcal{S})$ kompakten.

4. Naj bo (X, d) kompakten metrični prostor in $f : X \longrightarrow X$ funkcija z lastnostjo, da za poljubna $x, y \in X$ velja, da je $\mathrm{d}(f(x), f(y)) = \mathrm{d}(x, y)$. Pokažite, da je podana funkcija $f : X \longrightarrow X$ homeomorfizem.

Pripravil Iztok Banič

29.8.2003

1. Naj bo $X = \mathbf{R}^2$. Za poljubni realni števili a, b definiramo $K(a, b) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x^2 + y^2 < b\}$. Naj bo $\mathcal{T}$ topologija na X, za katero je družina $\mathcal{B} = \{K(a, b) : a, b \in \mathbf{R}\}$ baza. Da obstaja topologija na X, za katero je $\mathcal{B}$ baza, ni potrebno dokazovati.

   (a) Za vsako točko $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ poiščite limito zaporedja $\{(x + \frac{1}{n}, y) : n \in \mathbf{N}\}$ v topološkem prostoru $(X, \mathcal{T})$.

   (b) Pokažite, da $(X, \mathcal{T})$ ni povezan topološki prostor!

2. Naj bodo X_1, X_2, Y_1 in Y_2 topološki prostori ter $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ in $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ zvezni funkciji. Pokažite, da je potem funkcija $(f_1, f_2) : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$,, definirana s predpisom

$$(f_1, f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)),$$

   zvezna.

3. Naj bo $X = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]) \cup (\{0\} \times [0, \frac{1}{2}\rangle))$ podprostor evklidske ravnine $\mathbf{R}^2$. Pokažite, da je X lokalno kompakten, ni pa kompakten topološki prostor.

4. Naj bo

$$X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \Big(\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < n^2\} \times \{n\}\Big)$$

   podprostor evklidskega prostora $\mathbf{R}^3$. Na X naj bo definirana relacija $\sim$ takole:

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ in } y_1 = y_2.$$

   Pokažite, da je preslikava $f : X/_{\sim} \longrightarrow \mathbf{R}^2$, definirana s predpisom $f([x, y, z]) = (x, y)$, homeomorfizem.

Pripravil Iztok Banič

19.9.2003

1. Naj bo X topološki prostor. Pokažite, da je $U \subset X$ odprta v X natanko tedaj, ko je $\mathrm{Bd}(U) = \mathrm{Cl}(U) \setminus U$.

2. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Dokažite, da sta naslednji trditvi ekvivalentni.

   (a) $(X, \mathcal{T})$ je diskreten topološki prostor.

   (b) Za vsak topološki prostor $(Y, \mathcal{S})$ in vsako preslikavo $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ velja, da je le-ta zvezna.

3. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Dokažite ali s protiprimerom ovrzite naslednji trditvi (v primeru, da trditev ne drži, dokažite, da je podani primer res protiprimer).

(a) Če je prostor $(X, \mathcal{T})$ lokalno kompakten, potem je tudi kompakten.

(b) Če je prostor $(X, \mathcal{T})$ kompakten, potem je tudi lokalno kompakten.

4. Naj bo $X = \mathbf{R}^2$ in $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{K_r : r > 0\}$ topologija na X (da je $\mathcal{T}$ topologija na X, ni potrebno dokazovati), kjer je za vsak $r > 0$ množica K_r definirana takole:

$$K_r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}.$$

   (a) Poiščite zaprtja in notranjosti v X naslednjih podmnožic prostora X: $A = K_1$, $B = X \setminus K_1$ in $C = \{(0,0)\}$.

   (b) Ali je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ separabilen? Odgovor utemeljite!

Pripravil Iztok Banič

12.12.2003

1. Naj bo X neprazna množica in $A \neq \emptyset$ prava podmnožica množice X. Na X definirajmo topologijo $\mathcal{T}$ na naslednji način: $F \subset X$ je zaprta v X, če je bodisi $F = \emptyset$ bodisi $A \subset F$.

   (a) Pokažite, da je tako definirana družina $\mathcal{T}$ res topologija na X.

   (b) Dolažite, da $(X, \mathcal{T})$ ni Hausdorffov prostor.

2. Naj bosta X in Y topolpoška prostora in $f : X \longrightarrow Y$ bijektivna preslikava. Pokažite, da sta naslednji trditvi ekvivalentni:

   (a) Preslikava f je homeomorfizem.

   (b) Za vse $S \subseteq X$ velja, da je $f(\mathrm{Cl}(S)) = \mathrm{Cl}(f(S))$.

3. Naj bodo X topološki prostor, Y Hausdorffov prostor, H gosta podmnožica prostora X in $f, g : X \longrightarrow Y$ zvezni preslikavi, tako da za vsak $x \in H$ velja $f(x) = g(x)$. Pokažite, da potem za vsak $x \in X$ velja, da je $f(x) = g(x)$.

4. Pokažite ali s protiprimerom ovrzite naslednjo trditev (v primeru podanega protiprimera pokažite, da je to res protiprimer):

   Vsak podprostor prostora s topologijo števnih komplementov

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ je števna množica}\} \cup \{\emptyset\}$$

   je kompakten.

Pripravil Iztok Banič

29.1.2004

1. Naj bosta $X = \{a, b, c\}$ in $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$.

   (a) Pokažite, da obstaja topologija $\mathcal{T}$ na X, za katero je $\mathcal{B}$ baza.

   (b) Pokažite, da prostor $(X, \mathcal{T})$ ni Hausdorffov.

2. Naj bodo X in Y topološka prostora in $f : X \longrightarrow Y$ zvezna surjektivna preslikava. Pokažite, da sta naslednji trditvi ekvivalentni:

(a) Za vsako neprazno odprto podmnožico $U \subseteq X$ je $\mathrm{Int}(f(U)) \neq \emptyset$.
(b) Za vsako gosto podmnožico G v Y je $f^{-1}(G)$ gosta v X.

3. Glejmo na množico vseh racionalnih števil $\mathcal{Q}$ kot na podprostor evklidske premice $\mathcal{R}$.
   (a) Pokažite, da za vsak $q \in \mathcal{Q}$ velja, da množica $\{q\}$ ni odprta v $\mathcal{Q}$.
   (b) Pokažite, da $\mathcal{Q}$ ni niti povezan, niti lokalno povezan topološki prostor.

4. Naj bodo X in Y topološka prostora, K kompakten podprostor prostora X, $y \in Y$ in V odprta podmnožica prostora $X \times Y$, tako da je $K \times \{y\} \subseteq V$. Pokažite, da obstaja odprta okolica U točke y v Y, tako da je $K \times U \subseteq V$.

Pripravil Iztok Banič

19.2.2004 (kolokvij)

1. Naj bo $X = \mathbf{R}^2$.
   (a) Pokažite, da je $\mathcal{T} = \{\langle -a, a\rangle \times \langle -a, a\rangle : a \in \mathbf{R}, a \geq 0\} \cup \{X, \emptyset\}$ topologija na X.
   (b) Ali je prostor $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov? Zakaj?

2. Naj bodo X topološki prostor, M odprta in N gosta podmnožica prostora X. Pokažite, da je $\mathrm{Cl}(M \cap N) = \mathrm{Cl}(M)$.

3. Naj bosta $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ in $Y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, opremljena z evklidsko topologijo. Eksplicitno opišite homeomorfizem med X in Y.

4. Naj bo podana preslikava $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ s predpisom
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{če je } x \leq 2 \\ 2x + 1, & \text{sicer} \end{cases}$$
   Ali je podana funkcija f zvezna, če množico $\mathbf{R}$ (tako domeno kot kodomeno)
   (a) opremimo z indiskretno topologijo?
   (b) opremimo z evklidsko topologijo?
   (c) opremimo z levo Sorgenfreyevo topologijo?
   (d) opremimo z desno Sorgenfreyevo topologijo?
   (e) opremimo z diskretno topologijo?

   Svoje trditve dokažite.

Pripravil Iztok Banič

3.6.2004 (kolokvij)

1. Naj bo podana topologija $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ na množici $X = \{a, b, c\}$. Pokažite, da je prostor $(X, \mathcal{T})$ povezan s potmi.

2. V evklidski ravnini $\mathbf{R}^2$ vpeljimo relacijo $\sim$ na naslednji način:

$$(x', y') \sim (x, y) \Leftrightarrow y' - x' = y - x.$$

Pokažite, da je kvocientni prostor $\mathbf{R}^2/\!\sim$ homeomorfen $\mathbf{R}$.

3. Naj bosta Y in Z podprostora topološkega prostora X. Dokažite ali s protiprimerom ovrzite naslednje trditve:

   (a) Če sta Y in Z povezana, tedaj je povezan tudi podprostor $Y \cup Z$ prostora X.

   (b) Če sta Y in Z povezana, tedaj je povezan tudi podprostor $Y \cap Z$ prostora X.

   (c) Če sta Y in Z lokalno povezana, tedaj je lokalno povezan tudi podprostor $Y \cup Z$ prostora X.

4. Naj bo n naravno število. Na $\mathbf{R}^n$ definirajmo toplogijo $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbf{R}^n\} \cup \{K_r : r > 0\}$, kjer za vsak $r > 0$ definiramo $K_r = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| < r\}$ (da je tako definirana $\mathcal{T}$ res topologija na $\mathbf{R}^n$, ni potrebno dokazovati).

   (a) Pokažite, da prostor $(\mathbf{R}^n, \mathcal{T})$ ni kompakten.

   (b) Naj bo $(Y, \mathcal{S})$ Hausdorffov prostor.
   Pokažite, da je vsaka zvezna preslikava $f : (\mathbf{R}^n, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ konstantna.

Pripravil Iztok Banič

10.6.2004

1. Podana sta topološki prostor X in Hausdorffov prostor Y. Naj bosta $f : X \longrightarrow Y$ in $g : Y \longrightarrow X$ taki zvezni preslikavi, za kateri je $g \circ f = id_X$, kjer je id_X identična preslikava na X. Pokažite, da je tudi X Hausdorffov prostor.

2. Naj bodo $f : X \longrightarrow Y$ zaprta preslikava, B poljubna podmnožica prostora Y in U odprta podmnožica prostora X, taki da je $f^{-1}(B) \subseteq U$. Pokažite, da obstaja odprta podmnožica V v Y, tako da velja $B \subseteq V$ in $f^{-1}(V) \subseteq U$.

3. Naj bodo X in Y s potmi povezana topološka prostora, A prava podmnožica prostora X in B prava podmnožica prostora Y. Pokažite, da je prostor $(X \times Y) \setminus (A \times B)$ s potmi povezan.

4. Naj bosta $n \in \mathbf{N}$ in A kompakten podprostor prostora $\mathbf{R}^n$. Pokažite, da preslikava $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$, definirana s predpisom $f(x) = \|x\|$, doseže maksimum nekje na $\mathrm{Bd}(A)$.

Pripravil Iztok Banič

1.7.2004

1. Naj bo X topološki prostor. Podmnožica $A \subseteq X$ je nikjer gosta podmnožica prostora X, če je $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \emptyset$. Dokažite naslednji trditvi.

   (a) Rob vsake podmnožice prostora X je zaprta podmnožica prostora X.

   (b) Rob vsake odprte podmnožice prostora X je nikjer gosta podmnožica prostora X.

2. Glejmo na $B^2 = \{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ kot na podprostor evklidske ravnine. Na B^2 definiramo relacijo $\sim$ na naslednji način:
$$x \sim y \Leftrightarrow \|x\| = \|y\|.$$
Dokažite, da je kvocientni prostor $B^2/\sim$ homeomorfen zaprtemu enotskemu intervalu $[0,1]$.

3. Naj bosta $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\} \subseteq \mathbf{R}$ in $Y = (X \times I) \cup (I \times \{0\})$; Y obravnavamo kot podprostor evklidske ravnine. Pokažite, da je Y povezan topološki prostor, ki ni lokalno povezan.

4. Naj bo X kompakten topološki prostor. Dokažite ali s protiprimerom ovrzite naslednji trditvi.

   (a) Če je X končen, potem je X diskreten topološki prostor.

   (b) Če je X diskreten, potem je X končen topološki prostor.

   Pri vsakem navajanju protiprimera dokazite vse njegove lastnosti, zaradi katerih je to protiprimer.

Pripravil Iztok Banič

7.4.2005 (kolokvij)

1. Naj bo $X = \mathbf{N}$. V katerih primerih je družina $\mathcal{T}$ topologija na X?

   (a) $\mathcal{T} = \{U \in \mathcal{P}(X) : |U| < \infty\} \cup \{X\}$;

   (b) $\mathcal{T} = \{U \in \mathcal{P}(X) : |U| = \infty\} \cup \{\emptyset\}$;

   (c) $\mathcal{T} = \{U \in \mathcal{P}(X) : \forall n \in U, \forall m \in X, m > n \,\&\, D(m,n) = 1 \Rightarrow m \in U\}$;

   (d) $\mathcal{T} = \{U \in \mathcal{P}(X) : \forall n \in U, \forall m \in X, m > n \Rightarrow m \in U\}$.

   Ali je v katerem primeru $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor?

2. Naj bo X topološki prostor, Y njegov podprostor in $A \subseteq Y$. Dokažite ali s protiprimerom ovrzite naslednji trditvi (v primeru, da trditev ne drži, dokažite, da je protiprimer pravi):

   (a) $\mathrm{Int}_X(\mathrm{Cl}_X(\mathrm{Int}_X(A))) = \emptyset \Rightarrow \mathrm{Int}_Y(A) = \emptyset$;

   (b) $\mathrm{Int}_Y(\mathrm{Cl}_Y(\mathrm{Int}_Y(A))) = \emptyset \Rightarrow \mathrm{Int}_X(A) = \emptyset$.

3. Naj bosta X in Y topološka prostora. Dokažite, da sta X in Y separabilna natanko tedaj, ko je produkt $X \times Y$, opremljen s produktno topologijo, separabilen.

4. Preslikava $f : X \longrightarrow Y$ med topološkima prostoroma je vložitev, če je f homeomorfizem na podprostor $f(X)$ prostora Y. Dokažite, da so naslednje trditve ekvivalentne.

   (a) Preslikava $f : X \longrightarrow Y$ je vložitev in slika $f(X)$ je odprta v Y.

   (b) Preslikava $f : X \longrightarrow Y$ je odprta vložitev.

   (c) Preslikava $f : X \longrightarrow Y$ je zvezna odprta injekcija.

Pripravil Iztok Banič

9.6.2005

1. Opremimo realna števila $\mathbf{R}$ s topologijo $\mathcal{T}$, za katero je $\mathcal{B} = \{[a,b\rangle : a < b,\ a,b \in \mathbf{R}\}$ baza. Določite zaprtja in notranjosti množic $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$, $\langle 0,1\rangle$ in $\langle 0,1]$.

2. Naj bo n naravno število. Definirajmo na $\mathbf{R}^n$ relacijo $\sim$ na naslednji način:

$$x \sim y \Leftrightarrow ||x|| = ||y||\,,$$

kjer je $||(t_1,\ldots,t_n)|| = \sqrt{t_1^2 + \cdots + t_n^2}$. Pokažite, da je prostor $\mathbf{R}^n/\!\sim$ homeomorfen intervalu $[0,1\rangle$.

3. Naj bo X neštevna množica, opremljena s topologijo $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ je števna}\}$. Pokažite, da je $(X,\mathcal{T})$ povezan prostor.

4. Naj bo (X,d) metrični prostor in A, B neprazni podmnožici prostora X. Definirajmo

$$\mathrm{d}(A,B) = \inf\{\mathrm{d}(a,b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

Pokažite, da če sta A in B kompaktni, potem obstajata $a_0 \in A$ in $b_0 \in B$, tako da je $\mathrm{d}(A,B) = \mathrm{d}(a_0,b_0)$.

Pripravil Iztok Banič

10.6.2005 (kolokvij)

1. Naj bosta $K_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y = x^2\}$ in $K_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in [-1,1]\}$. Glejmo na $X = K_1 \cup K_2$ kot na podprostor evklidske ravnine. Definirajmo preslikavo $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow X$ s predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,x^2)\,, \text{za}\, x \notin [-1,1] \\ (x,y)\,, \text{sicer} \end{cases}$$

Ali je preslikava f kvocientna? Svoj odgovor podprite z dokazom.

2. Naj bo $X = [-1,1] \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$.

   (a) Opremimo X z evklidsko topologijo. Poiščite vse povezane podmnožice prostora X.

   (b) Opremite X s kako topologijo $\mathcal{T}$, da bo prostor $(X,\mathcal{T})$ povezan.

3. Naj bo $\mathcal{T}$ topologija na $\mathbf{N}$, za katero je družina $\mathcal{B} = \{U_k : k \in \mathbf{N}\}$ baza. Pri tem je za vsako naravno število k množica $U_k = \{n \in \mathbf{N} : k \mid n\}$ (da obstaja topologija, za katero je $\mathcal{B}$ baza, ni potrebno dokazovati). Pokažite, da je $(\mathbf{N},\mathcal{T})$ kompakten prostor.

4. Naj bosta

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(S((0,\frac{1}{n+1}),\frac{1}{n+1})\Big) \text{ in } Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(S((0,\frac{n+5}{4n+4}),\frac{n+5}{4n+4})\Big)$$

podprostora evklidske ravnine $\mathbf{R}^2$. Pri tem je $S(x,r) = \{y \in \mathbf{R}^2 : \mathrm{d}(x,y) = r\}$. Pokažite, da X in Y nista homeomorfna.

Pripravil Iztok Banič