

Univerza v Mariboru  
Fakulteta za naravoslovje in matematiko  
Oddelek za matematiko in računalništvo  
Enopredmetna matematika

## IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 29.01.2008

1. Skiciraj množico kompleksnih rešitev enačbe

$$z^6 - 7iz^3 + 8 = 0.$$

2. Naj bo  $a$  iracionalno število in funkcija  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  podana s predpisom

$$f(n) = an - [an],$$

kjer  $[x]$  pomeni celi del števila  $x$ . Dokaži:

- (a) Funkcija  $f$  je injektivna.
- (b)  $f(\mathbb{N}) \cup \mathbb{Q} = \emptyset$ .
- (c) Če sta  $y_1, y_2 \in f(\mathbb{N})$  in  $y_1 + y_2 < 1$ , potem je  $y_1 + y_2 \in f(\mathbb{N})$ .

3. Dva hodnika širine  $a$  in  $b$  se sekata pod pravim kotom. Določi dolžino najdaljše palice, ki jo lahko še spravimo iz enega hodnika v drugega.

4. Določi konvergenčno območje vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^2}{(1+x^2)^n}$$

in izračunaj njeno vsoto.

Univerza v Mariboru  
Fakulteta za naravoslovje in matematiko  
Oddelek za matematiko in računalništvo  
Enopredmetna matematika

## IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 17.06.2008

1. Dano je zaporedje  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  z začetnim členom  $x_1 = 5$  in rekurzivno formulo

$$x_{n+1} = 5\sqrt{x_n - 1} - 3.$$

Dokaži, da je zaporedje Cauchyjevo in poišči njegovo limito.

2. Pokaži, da za poljubna  $x, y \in \mathbb{R}$  velja neenakost

$$\left| \ln \frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{y + \sqrt{1 + y^2}} \right| \leq |x - y|.$$

3. Naj bo  $P$  ploskev, ki jo dobimo, če graf funkcije  $y = \frac{1}{2}x^2$  zavrtimo okrog osi  $y$ . Ploskev  $P$  razdeli kroglo s središčem v izhodišču in radijem  $\sqrt{3}$  na dva dela. Izračunaj razmerje njunih volumnov.

4. Funkcijo  $f(x) = \frac{1+x^2}{(1-x)^3}$  razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke  $a = 0$  in izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{2^n}.$$

## IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 01.07.2008

1. Skiciraj graf funkcije  $f(x) = \frac{4x}{|2x-7|}$ . Naj bo  $n \in \mathbb{N}$  in

$$A_n = \left\{ \frac{4m}{|2m-7|} \mid m \in \mathbb{N}, m \geq n \right\}.$$

Preveri, da je za vsa naravna števila  $n$  množica  $A_n$  omejena. Določi infimum in supremum množic  $A_1$  in  $A_7$ . Ali je kateri od njih minimum oz. maksimum?

2. Naj bo funkcija  $f$  zvezno odvedljiva v neki okolici točke  $a$  in naj obstaja  $f''(a)$ . Dokaži, da velja

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$

**Pomoč.** Uporabi Taylorjevo formulo.

3. Izračunaj integrala

$$\int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx \quad \text{in} \quad \int x \ln(1+x^3) dx.$$

4. (a) Dokaži, da se funkciji

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{2x^2} \right) \quad \text{in} \quad g(x) = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{2x-1} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{2x+1} \right)$$

na intervalu  $[1, \infty)$  razlikujeta le za konstanto. Konstanto tudi izračunaj.

- (b) Pokaži, da vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{2n^2} \right)$$

konvergira in izračunaj njeno vsoto.

Univerza v Mariboru  
Fakulteta za naravoslovje in matematiko  
Oddelek za matematiko in računalništvo  
Enopredmetna matematika

## IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 26.08.2008

1. Poišči vse korene enačbe

$$z^6 + i\sqrt{3}z^3 - 1 - \sqrt{3}i = 0$$

in jih grafično predstavi v kompleksni ravnini.

2. Dokaži, da ne obstaja zvezna surjektivna preslikava  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , pri kateri bi prasluka  $f^{-1}(y)$  vsebovala natanko dve točki za vsak  $y \in \mathbb{R}$ .

3. Z uporabo prvih dveh odvodov nariši graf funkcije

$$f(x) = \sqrt{|x|} (2 - \ln x^2) .$$

4. Naj bo  $a \in (0, 1)$  in

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{n^2} x^n .$$

- (a) Za katere  $x \in \mathbb{R}$  vrsta  $f$  konvergira?  
(b) Ali konvergira vrsta  $f'(1)$ ?

Univerza v Mariboru  
Fakulteta za naravoslovje in matematiko  
Oddelek za matematiko in računalništvo  
Enopredmetna matematika

## IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 09.09.2008

1. (a) Določi množico točk v kompleksni ravnini, ki zadoščajo neenačbama

$$|\operatorname{Re}(z - 1)| < \operatorname{Im}(z) \quad \text{in} \quad \operatorname{Re}(z^2) > \operatorname{Im}(z^2).$$

- (b) Pokaži, da je kompleksno število  $z \neq 0$  realno natanko tedaj, ko je število  $z - \frac{1}{z}$  realno.

2. Zaporedje  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  je podano z rekurzivnim predpisom

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \frac{2}{a_n} + \frac{a_n}{2}.$$

Pokaži, da je zaporedje konvergentno in poišči njegovo limito.

3. Naj bo volumen valja konstanten. Poišči razmerje med polmerom in višino valja, tako da bo njegova površina najmanjša.
4. Naj bosta  $f$  in  $g$  zvezni funkciji na intervalu  $[a, b]$  in naj velja

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Dokaži, da obstaja takšna točka  $c \in [a, b]$ , da velja  $f(c) = g(c)$ .