Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 18. 06. 2009

1. Naj bo $a, a_1 a_2 a_3 \ldots$ neskončen decimalni zapis realnega števila $x > 0$.

   (a) Dokaži, da je $x = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, natanko tedaj, ko bodisi obstajata taka $i, j \in \mathbb{N}$, da velja $a_{k+i} = a_k$, za vsak $k \geq j$ bodisi obstaja tak $j \in \mathbb{N}_0$, da je $a_{k+j} = 0$, za vsak $k \in \mathbb{N}$.

   (b) Naj bodo števila $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$ enaka. S pomočjo točke (a) zapiši število x v obliki ulomka.

2. (a) Skiciraj množico kompleksnih rešitev enačbe:

$$z^6 - 7iz^3 + 8 = 0\,.$$

   (b) Pokaži, da je za vsak $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, izraz

$$f(z) = \frac{z^4 + z^2 + 1}{z^3 + z}$$

   realen.

3. Ali vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \ln(1 + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \qquad \text{in} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-n} \cos n}{n^2 - n}$$

   konvergirata? Odgovor utemelji?

4. Naj bodo $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije za katere velja

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)\,,$$

   za poljuben $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Denimo, da je $f(a) = g(a) = h(a)$, za nek $a \in \mathbb{R}$. Z ϵ - δ definicijo dokaži, da je funkcija g zvezna v točki a, če sta funkciji f in h zvezni v točki a.

   (b) Predpostavimo, da je funkcija g zvezna in da imata funkciji f in h ničlo. Pokaži, da ima tedaj tudi funkcija g ničlo.

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 02. 07. 2009

1. Z aksiomi za realna števila in upoštevanjem definicij pokaži naslednje trditve:
   (a) $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$;
   (b) $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$;
   (c) $a \in \mathbb{R}$, $|a|^2 = a^2$;
   (d) $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow |a| \leq |b|$.

2. Dana naj bo funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s predpisom
$$f(z) = z^5 - 10z^3 - 5iz^2(z^2 - 2) + 5z - \sqrt{3}\,.$$
   (a) Poišči vsa kompleksna števila z, za katera je $f(z) = 0$.
   (b) Naj bo $D = \{|z| \mid f(z) = 0\}$. Poišči maksimum in minimum množice D.

3. Zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano z rekurzivno formulo
$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + x_n + 1}{3}}$$
   in začetnim členom $x_1 = a > 0$. Pokaži:
   (a) Če je $a < 1$, je zaporedje strogo naraščajoče.
   (b) Če je $a > 1$, je zaporedje strogo padajoče.
   (c) Za vsak $a > 0$, je zaporedje konvergentno. Izračunaj limito.

4. Naj bo $f : [0, 1] \to [0, 1]$ padajoča zvezna funkcija z lastnostjo $f(0) - f(1) > \frac{1}{2}$ in $g : [0, 1] \to [0, 1]$ naraščajoča zvezna funkcija z lastnostjo $g(1) - g(0) > \frac{1}{2}$. Dokaži, da obstaja tako realno število $c \in [0, 1]$, da je $f(c) = g(c)$.

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 20. 08. 2009

1. V množici kompleksnih števil poišči rešitve enačbe:

$$z^4 + 1 = iz(z^2 - 1)\,.$$

2. Zaporedji $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sta podani rekurzivno:

$$p_1 = \frac{2}{3} \qquad \text{in} \qquad q_1 = \frac{1}{3}\,,$$

$$p_{n+1} = \frac{7}{10}p_n + \frac{5}{10}q_n \qquad \text{in} \qquad q_{n+1} = \frac{3}{10}p_n + \frac{5}{10}q_n\,.$$

   (a) Pokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $p_n + q_n = 1$.

   (b) Dokaži, da sta zaporedji konvergentni in poišči limiti.

3. Naj bo vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna in naj bodo njeni členi različni od -1. Dokaži, da so absolutno konvergentne tudi vrste:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$,

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$,

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$.

4. Določi realni števili a in b, da bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a\tan(1-x)+2be^{1-x}-2b}{1-x^3} & ; \quad x < 1 \\ 2^{2-x} & ; \quad 1 \le x \le 2 \\ \frac{3a\sin(x-2)}{4|x-2|} + \frac{b(x-2)}{\sqrt{2x}-x} & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

zvezna.

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 03. 09. 2009

1. (a) V množici kompleksnih števil reši enačbo:

$$z^{12} + z^8 + iz^4 - i^3 = 0\,.$$

   (b) Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$. Dokaži:

$$\left|\mathrm{Re}\left(z^{2n+1}\right)\right| \leq (2n+1)\,|z|^{2n}\,|\mathrm{Re}(z)|\,.$$

2. Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano rekurzivno:

$$a_1 = 1 \quad \text{in} \quad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}\,.$$

   (a) Pokaži, da je zaporedje omejeno.

   (b) Dokaži, da je zaporedje Cauchyjevo in izračunaj njegovo limito.

3. Izračunaj limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} \qquad \text{in} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}\,.$$

4. (a) Poišči primer funkcij $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z lastnostjo: funkcija g ni zvezna v točki $a \in \mathbb{R}$, funkcija $f \circ g$ pa je zvezna v točki a.

   (b) Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo monotona in zvezna, za funkcijo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pa v točki $a \in \mathbb{R}$ obstajata leva in desna limita. Dokaži: če funkcija g ni zvezna v točki a, potem tudi funkcija $f \circ g$ ni zvezna v točki a.