Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 03. 02. 2011

1. Naj bo $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ preslikava definirana s predpisom

$$\varphi(z) = z^4 + i\left|z^4\right| .$$

Skiciraj množico $\varphi^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \varphi(z) \in \mathbb{R}\}$.

2. Naj bo $c > 0$. Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano z rekurzivnim predpisom:

$$a_1 = \sqrt{c} \qquad \text{in} \qquad a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}\,.$$

   (a) Dokaži, da je zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno in določi njegovo limito.
   (b) Za katera realna števila c bo limita zaporedja naravno število?

3. Naj bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje s pozitivnimi členi. Dokaži, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ konvergira natanko tedaj, ko konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^3}{a_n^2+1}$.

4. Naj bo podana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{-\frac{1}{x}}} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases} .$$

   (a) Ali je funkcija f zvezna v točki $x = 0$? Odgovor utemelji.
   (b) Poišči asimptoto grafa funkcije f.

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 16. 06. 2011

1. (a) Dokaži, da za poljubni kompleksni števili z in w velja

$$\frac{|z+w|^2+|z-w|^2}{2} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(w))^2 \Leftrightarrow (\mathrm{Im}(z)) = (\mathrm{Re}(w)) = 0\,. \quad \textbf{(15)}$$

   (b) Naj bo $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$. Poišči vsa takšna cela števila n, za katera bosta kompleksni števili α^n in i oddaljeni za $\sqrt{3}$. **(15)**

2. (a) Na bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tako zaporedje realnih števil, da je $a_1 = 1$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_{n+1} > \frac{3}{2}a_n$. Dokaži, da ima zaporedje $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s splošnim členom

$$b_n = \frac{a_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$$

   bodisi končno limito bodisi gre proti neskončno. **(12)**

   (b) Dokaži, da za vsak $\beta > 1$ obstaja tako zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ z istimi lastnostmi kot v točki (a), da velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}} = \beta\,. \quad \textbf{(13)}$$

3. Za katera realna števila $a > 0$ vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{in} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}}$$

   konvergirata? Odgovor utemelji. **(25)**

4. Naj bo $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija z lastnostjo $(f(x))^2 = 1$, za vsak $x \in (0,1)$. Dokaži, da je f konstantna funkcija. **(20)**

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 30. 06. 2011

1. Dana je množica $N = \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\,(z^2) > 0 \text{ in } |z| \geq \frac{1}{100} \right\}$.

   (a) Množico N skiciraj v kompleksni ravnini. **(10)**

   (b) Za katera naravna števila n je $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)^n \in N$? **(15)**

2. Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano z začetnim členom a_1 in rekurzivnim predpisom

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^2 + 1\,.$$

   (a) Dokaži, da je zaporedje (a_n) naraščajoče za vsak $a_1 \in \mathbb{R}$. **(10)**

   (b) Dokaži, da je zaporedje (a_n) konvergentno za vsak $|a_1| \leq 2$ in izračunaj njegovo limito. **(15)**

3. Izračunaj limiti:

$$\lim_{x\to 1}\left(\log\left(\frac{10}{x}\right)\right)^{\frac{x}{\log x}} \qquad \text{in} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos(\alpha x)} - \sqrt{\cos(\beta x)}}{x^2}\,. \qquad \textbf{(25)}$$

4. Naj bo $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, $f(0) = 1$ in $\lim_{x\to\infty}(f(x) - \sqrt{x}) = 0$. Dokaži, da obstaja tak $a \in (0, \infty)$, da je $f(a) = a$. **(25)**

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 08. 09. 2011

1. Poišči vse kompleksne rešitve enačbe
$$\left(z^2-1\right)^4+1=(z-1)^4+(z+1)^4$$
ter jih skiciraj v kompleksni ravnini. **(25)**

2. Naj bo $a>0$ in zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ podano z rekurzivnim predpisom
$$x_{n+1}=a+x_n^2$$
in začetnim členom $x_0=0$. Poišči vse potrebne in zadostne pogoje, da bo zaporedje (x_n) konvergentno. **(20)**

3. Dokaži konvergenco naslednjih vrst:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}\right)}{n(n+1)}$, **(15)**

   (b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln(\ln n))^{\ln n}}$. **(10)**

   Poišči tudi vsoto vrste (a).

4. Naj bo $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ funkcija, ki zadošča
$$f(x)e^{f(x)}=x\,,$$
za vsak $x\in[0,\infty)$. Dokaži:

   (a) f je monotona, **(10)**

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, **(10)**

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\ln x}=1$. **(10)**