Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 31. 01. 2012

1. V množici kompleksnih števil poišče vse rešitve enačbe
$$z(z+4) = |z+2| - 16\,. \qquad \textbf{(20)}$$

2. Naj bo zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podano z rekurzivnim zapisom
$$a_{n+1} = \frac{2(2a_n+1)}{a_n+3}$$
in začetnim členom $a_1 = 1$. Dokaži, da je zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno in poišči njegovo limito. **(30)**

3. Ali vrsti
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n-1}}{4^n} \qquad \text{in} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{\frac{1}{2\sqrt{n}}}}{\arctan(\pi n)}$$
konvergirata? Če katera izmed vrst konvergira, jo izračunaj. **(25)**

4. Naj za funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja
$$f(x+y) = f(x) + f(y)\,.$$
   (a) Pokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ in vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $f(nx) = nf(x)$. **(10)**
   (b) Dokaži, da je funkcija f zvezna v eni točki natanko tedaj, ko je zvezna v vseh točkah iz $\mathbb{R}$. **(15)**

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 19. 06. 2012

1. Naj bosta podani množici $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left|\frac{x}{x+1}\right| \leq 1\right\}$ in $B = \left\{\frac{|x|}{|x|+1} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$. Poišči inf, sup, min in max (če obstajajo) za množici $A \cup B$ in $A \cap B$. Dokaži, da je $A \cap B$ omejena množica. **(25)**

2. Naj bo $c > 0$. Zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano z rekuzivnim predpisom

$$x_1 = c \quad \text{in} \quad x_{n+1} = 1 + \frac{x_n^2}{4}\,.$$

   (a) Dokaži, da je zaporedje (x_n) naraščajoče. **(10)**

   (b) Za katere vrednosti parametra c je zaporedje (x_n) konvergentno? **(15)**

3. Dokaži, da vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$$

   konvergira in izračunaj njeno vsoto. **Pomoč:** splošni člen vrste izrazi kot razliko sosednjih členov. **(25)**

4. Naj bosta $f, g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ zvezni funkciji in $a < b$. Dokaži ali ovrzi:

   (a) Če je $f(a) = g(b) = 0$, tedaj obstaja tak $c \in [a, b]$, da velja $f(c) = g(c)$. **(15)**

   (b) Če je $f(a) = g(b) \neq 0$, tedaj obstaja tak $c \in [a, b]$, da velja $f(c) = g(c)$. **(10)**

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 03. 07. 2012

1. Naj za kompleksni števili $z, w \in \mathbb{C}$ velja $|z| \leq 1$ in $|w| \leq 1$. Dokaži, da je tudi
$$\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right| \leq 1\,. \qquad \textbf{(25)}$$

2. Poišči limito zaporedja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ki je podano z rekurzivnim predpisom
$$x_1 = 1 \quad \text{in} \quad x_{n+1} = x_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$
Od katerega člena naprej se vsi členi zaporedja (x_n) med seboj razlikujejo za manj kot $\frac{1}{1000}$? **(25)**

3. Izračunaj limiti
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[5]{n} + \sqrt{2 + 4\sqrt[3]{n^2}}}{\sqrt[3]{1-2n}} \quad \text{in} \quad \lim_{x\to 0} \left(1 + \tan^2 x\right)^{\frac{1}{x\sin x}}\,. \qquad \textbf{(25)}$$

4. Naj bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje s pozitivnimi členi in $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo naraščajoča (ne nujno zvezna) funkcija z lastnostjo $f(0) \geq 0$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $b_n = f(a_n)$. Dokaži, če zaporedje (b_n) konvergira proti 0, potem tudi zaporedje (a_n) konvergira proti 0. Pokaži še, da je v tem primeru $f(0) = 0$. **(25)**

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE I

Maribor, 13. 09. 2012

1. Določi in skiciraj vsa kompleksna števila z, za katera velja:

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\overline{\mathrm{z}}}\right) \cdot \mathrm{Re}\left(\left(\mathrm{z}^2\right) + 4\right) = 3 \cdot \mathrm{Im}(\mathrm{z})\,. \qquad (\mathbf{25})$$

2. Naj bo zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ podano z rekurzivnim predpisom

$$a_{n+1} = \frac{3a_n - 1}{a_n + 1}$$

in začetnim členom $a_1 = 2$.

   (a) Pokaži, da je zaporedje omejeno. (**10**)

   (b) Dokaži, da je zaporedje Cauchyjevo in izračunaj njegovo limito. (**15**)

3. Ali vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-7)^n}{n 2^{3n}} \qquad \text{in} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3 - 2}{n^3 + 2}\right)^{n^3}$$

konvergirata? Odgovor utemelji. (**25**)

4. Naj bo $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija z lastnostjo $f(0) = 1$ in $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - \alpha \cdot x) = 0$, kjer je $\alpha \in \mathbb{R}$. Dokaži: če je $\alpha \in [0, 1)$, tedaj obstaja tak $c \in [0, \infty)$, da je $f(c) = c$. Ali velja tudi obrat te izjave? Odgovor utemelji. (**25**)