Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

1. KOLOKVIJ IZ ANALIZE I

Maribor, 30. 04. 2009

1. S pomočjo aksiomov za realna števila pokaži naslednji trditvi:

   (a) $a \cdot (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = a \cdot b_1 + a \cdot b_2 + \ldots + a \cdot b_n$, $n \in \mathbb{N}$; **(10)**

   (b) $a > b$ in $c > d \Rightarrow a + c > b + d$. **(10)**

   Opomba: Vsak korak dokaza utemelji z ustreznim aksiomom.

2. Naj bo p praštevilo. Dokaži, da je $\sqrt{p}$ iracionalno število. **(20)**

3. (a) Naj bo $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Dokaži, da velja:

   $$\left| \frac{|z| - \overline{z}}{\overline{z}} \right| \leq |Arg(z)| \,.$$

   (10)

   (b) Poišči vse komleksne rešitve enačbe:

   $$z^3 - 6i(z^2 - 1) - 12z + 2\sqrt{3} = 0\,.$$

   (20)

4. Naj bo dano zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ z rekurzivnim predpisom

   $$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1$$

   in začetnim členom $a_1 = 1$.

   (a) Pokaži, da je zaporedje omejeno. **(10)**

   (b) Dokaži, da je zaporedje konvergentno. **Pomoč:** Oglej si dve ustrezni podzaporedji danega zaporedja. **(15)**

   (c) Izračunaj limito danega zaporedja. **(5)**

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

2. KOLOKVIJ IZ ANALIZE I

Maribor, 08. 06. 2009

1. S pomočjo Cauchyjevega pogoja dokaži, da zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s splošnim členom
$$a_n = \frac{1}{\sin^2 1} + \frac{1}{2\cdot\sin^2 2} + \frac{1}{3\cdot\sin^2 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot\sin^2 n}$$
ni konvergentno. (**25**)

2. Za katere $a \in \mathbb{R}$ vrsta
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+a}{n-1}\right)^{n^2-n}$$
konvergira. Odgovor utemelji. (**15**)

3. Naj bo $\mathbb{P}$ množica vseh praštevil. Pokaži enakost:
$$\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}\,.$$
Pomoč: Neskončni produkt pretvori v geometrijsko vrsto. (**10**)

4. Naj bo $a > 0$. Izračunaj limiti:
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\ln\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \qquad \text{in} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^{3x}-2\sin^2 x-\cos(2x)}{2\sin x}\,.$$
(**20**)

5. Naj bo dana funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ s predpisom
$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 1-x & ; \quad x \notin \mathbb{Q}\cap[0,1] \end{cases}\,.$$
   (a) Dokaži, da je f zvezna le v točki $x = \frac{1}{2}$. (**15**)
   (b) Pokaži, da f zavzame vsako vrednost na intervalu $[0,1]$. (**5**)
   (c) Ali je funkcija f zvezna, če definicijsko območje zožimo na racionalna števila z intervala $[0,1]$? Odgovor utemelji. (**10**)