Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

1. KOLOKVIJ IZ ANALIZE I

Maribor, 22. 04. 2010

1. Pokaži, da je množica $A = \left\{ \frac{n+\sqrt{n^2+8n}}{2n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ omejena ter določi $\alpha = \inf A$ in $\beta = \sup A$. Za poljubno število $\epsilon > 0$ poišči taka elementa $a, b \in A$, da bo $a < \alpha + \epsilon$ in $b > \beta - \epsilon$.

2. (a) V množici kompleksnih števil poišči vse rešitve enačbe

$$z^6 + i\sqrt{3}z^3 - (1+\sqrt{3}i) = 0$$

in jih predstavi v kompleksni ravnini.

   (b) Naj bodo $z_1, z_2, \ldots, z_n$ rešitve enačbe $z^n = 1$. Pokaži, da velja

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arg}(z_k) = (n-1)\pi\,.$$

3. Razišči konvergentnost zaporedja

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cos\frac{n(n+1)\pi}{3}\,.$$

Svoj odgovor utemelji.

4. Realno zaporedje je podano z začetnim členom $x_1 \in \mathbb{R}$ in rekurzivno formulo $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n}$.

   (a) Ugotovi, pri katerih vrednostih začetnega člena x_1 zaporedje narašča, pri katerih pada in pri katerih je konstantno.

   (b) Pokaži, da je za vsak $x_1 \in \mathbb{R}$ zaporedje konvergentno in izračunaj njegovo limito.

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

2. KOLOKVIJ IZ ANALIZE I

Maribor, 11. 06. 2010

1. Preveri ali je zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s splošnim členom

$$a_n = \frac{e}{2+\sqrt{1}} + \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2+\sqrt{2}} + \frac{e^{\frac{1}{3}}}{2+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{2+\sqrt{n}}$$

konvergentno.

2. Ali vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2+4n} \qquad \text{in} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+\sqrt{n}}{n^2}\right)$$

konvergirata? Ali katera izmed vrst konvergira pogojno? Odgovor utemelji.

3. Naj bo $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ zvezna v točki $x = 0$ in denimo, da je $f(x) = f\left(x^2\right)$, za vsak $x \in (-1,1)$. Dokaži, da je $f(x) = f(0)$, za vsak $x \in (-1,1)$. **Pomoč:** oglej si zaporedje $\left(x^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

4. Naj bo $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija z lastnostjo $f(0) = 1$ in $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$. Dokaži, da obstaja tak $c \in [0,\infty)$, da je $f(c) = c$.