Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

1. KOLOKVIJ IZ ANALIZE I

Maribor, 22. 04. 2011

1. Naj bo podana množica

$$M = \{x \in (0,1) \,|\, x \text{ v decimalnem zapisu vsebuje vsaj dve enici, pri čemer se vsaj ena enica pojavi na prvih petih decimalnih mestih}\}.$$

   Določi $\inf M$ in $\sup M$. Ali obstajata tudi $\min M$ in $\max M$? Svoje ugotovitve utemelji z dokazom. **(25)**

2. (a) Skiciraj množico kompleksnih števil, ki zadoščajo enačbi:

$$z^6 - 7iz^3 + 8 = 0\,.$$

   (20)

   (b) Vpeljimo množico $\mathcal{K} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$. Dokaži, da je za poljubni kompleksni števili $z_1, z_2 \in \mathcal{K}$ izraz

$$\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$$

   realno število. **(10)**

3. Razišči konvergenco zaporedja

$$a_n = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \sin\frac{n(n+1)\pi}{3}\,.$$

   Svoj odgovor utemelji. **(15)**

4. Naj bo zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podano z rekurzivnim predpisom

$$a_1 = 2 \text{ in } a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(a_n + \frac{4}{a_n}\right)\,.$$

   (a) Pokaži, da je $a_n \in [1,2]$, za vsak $n \in \mathbb{N}$. **(10)**

   (b) Dokaži, da je zaporedje (a_n) konvergentno. **(20)**

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

2. KOLOKVIJ IZ ANALIZE I

Maribor, 06. 06. 2011

1. Ali zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s splošnim členom

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{8}\ln 4} + \frac{2}{\sqrt{27}\ln 9} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{(n+1)^3}\ln (n+1)^2}$$

konvergira? Odgovor utemelji. (**20**)

2. Naj bo zaporedje delnih vsot $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ podano s splošnim členom

$$s_n = 1 + \frac{n^2}{1+2+\ldots+n}.$$

Določi splošni člen zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in ugotovi, ali je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna. Če je konvergentna, izračunaj še njeno vsoto. (**15**)

3. Za katera števila $k \in \mathbb{N}$ vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kn)!(3n)!}{n!(4n)!}$ konvergira? Odgovor utemelji. (**15**)

4. Naj bosta $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkciji. Funkcija g naj bo injektivna in zvezna. Dokaži ali ovrzi:

   (a) Če obstaja $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$, obstaja tudi $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. (**15**)

   (b) Če obstajata leva in desna limita funkcije f v točki a, ki sta različni, potem ne obstaja $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))$. (**15**)

5. Naj bo $f : [0,1] \to [0,1]$ zvezna funkcija. Dokaži: če ima funkcija f vsaj eno ničlo na intervalu $(0,1)$, potem obstaja tak $a \in [0,1]$, da je $f(a) = \sqrt{f\left(a^2\right)}$. (**20**)