Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

1. del pisnega izpita iz ANALIZE I

Maribor, 20. 04. 2012

1. Naj bo podana množica

$$M = \{x \in (0,1) \,|\, x \text{ v decimalnem zapisu vsebuje natanko dve devetici, pri čemer se vsaj ena devetica pojavi na prvih treh mestih}\}$$

   Določi $\inf M$ in $\sup M$. Ali obstajata tudi $\min M$ in $\max M$? Svoje ugotovitve utemelji z dokazom. **(20)**

2. V množici kompleksnih števil reši enačbo:

$$z^5 - 5z(2z^2-1) + 5z^2 i(z^2-2) + 2i - \sqrt{3} = 0\,. \qquad \textbf{(25)}$$

3. Naj bosta z in w kompleksni števili z lastnostjo $z + \overline{z} = z\overline{z}$ in $w + \overline{w} = -w\overline{w}$.

   (a) Dokaži, da za poljubno naravno število n velja

$$|(z-1)^n - (w+1)^n| \leq 2\,. \qquad \textbf{(15)}$$

   (b) Naj bo $w = \frac{\sqrt{2}-2+i\sqrt{2}}{2}$. Za katera kompleksna števila z (z lastnostjo $z+\overline{z} = z\overline{z}$) velja

$$|(z-1)^n - (w+1)^n| = 2\,? \qquad \textbf{(15)}$$

4. Naj bo zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podano z rekurzivnim predpisom

$$a_1 = 6 \quad \text{in} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_n}{2} + \frac{3}{a_n}\right).$$

   (a) Pokaži, da je zaporedje (a_n) omejeno. **(10)**

   (b) Dokaži, da je zaporedje (a_n) konvergentno in poišči njegovo limito. **(15)**

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

2. del pisnega izpita iz ANALIZE I

Maribor, 08. 06. 2012

1. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ in $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aritmetično zaporedje podano z rekurzivnim predpisom
$$x_1 \in \mathbb{R} \quad \text{in} \quad x_{n+1} = x_n + a\,.$$
Dokaži, da je zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo natanko tedaj, ko je $a = 0$. (**20**)

2. Preveri, ali je zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s splošnim členom
$$x_n = \arctan(1) + \arctan(2) + \ldots + \arctan(n)$$
konvergentno. Odgovor utemelji. (**15**)

3. Naj bodo $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{N}$. Zapiši vse pogoje, da bo vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(c_1 \cdot n)!(c_2 \cdot n)!}{(c_3 \cdot n)!(c_4 \cdot n)!}$$
konvergentna? Ali vrsta konvergira za $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$ in $c_4 = 4$? (**20**)

4. Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Dokaži, da je tudi funkcija $|f|$ zvezna na množici $[a, b]$. Ali velja tudi obrat te izjave? Odgovor utemelji. (**25**)

5. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka zvezna funkcija, da za nek $a \in \mathbb{R}$ velja $f(f(a)) = a$. Dokaži, da obstaja tak $b \in \mathbb{R}$, da je $f(b) = b$. (**20**)