Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE II

Maribor, 05. 02. 2010

1. (a) Naj bo $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija z lastnostjo $f(1) = f(2)$. Dokaži, da obstaja tak $c \in (0, 1)$, da je $f'(c) = 2f'(2c)$.

   (b) Naj bo $f(x) = 3x^3 - 14x^2 + 21x + 1$. Poišči tak $c \in (0, 1)$, da bo $f'(c) = 2f'(2c)$.

2. Krivuljo
$$\frac{x^2}{e^{2a}} + \frac{y^2}{(e^a + e^{-a})^2} = 1$$
zavrtimo okoli x-osi. Za katero vrednost parametra $a \in \mathbb{R}$ bo imelo dobljeno rotacijsko telo najmanjši volumen?

3. (a) Preveri, da integral
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2}\, dx$$
obstaja. Še le nato ga izračunaj.

   (b) Z razvojem v Taylorjevo vrsto določi števili $a, b \in \mathbb{R}$, da bo limita
$$\lim_{x \to 0} \frac{ax + b(1 - e^x) + \ln(1 + ax)}{x - \sin x}$$
obstajala. Kolikšna je v tem primeru limita?

4. Izračunaj vsoto vrste
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+3)}\,.$$

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE II

Maribor, 18. 02. 2010

1. Naj bo f taka dvakrat odvedljiva funkcija na intervalu $[a, b]$, da velja $f(a) = f(b) = 0$. Naj bo $c \in (a, b)$ taka točka, da je $f(c) > 0$. Dokaži, da obstaja točka $d \in [a, b]$, da velja $f''(d) < 0$.

2. Dana je funkcija $f(x) = 2^{a^2} \sin(ax)$. Naj bosta A in B sosednji presečišči funkcije f in x-osi. Za katere vrednosti $a \in (0, \infty)$ bo ploščina lika, ki ga graf funkcije f oklepa z daljico $\overline{AB}$, najmanjša?

3. Naj bo podano funkcijsko zaporedje $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ s predpisom
$$f_n(x) = nx\left(1 - x^2\right)^n .$$
Za vsak $x \in [0, 1]$ določi limito funkcijskega zaporedja $(f_n(x))$. Ali je konvergenca na intervalu [0,1] enakomerna?

4. Funkcijo $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ podano s predpisom $f(x) = \sin\left(\frac{x+\pi}{2}\right)$ razvij v Fourierovo vrsto in s pomočjo dobljenega rezultata izračunaj vsoto vrste
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 4k^2} .$$

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE II

Maribor, 24. 06. 2010

1. (a) Naj bosta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ odvedljivi funkciji. Ali sta tudi funkciji $\max\{f, g\}$ in $\min\{f, g\}$ odvedljivi? Odgovor utemelji.
   (b) Pokaži, da funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom
   $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$
   ni zvezno odvedljiva v $x = 0$.

2. V telo, ki nastane z rotacijo lika
   $$\{(x, y) \mid y + \ln |x| \leq 0 \ \& \ y \geq 0\}$$
   okrog osi y, včrtaj rotacijski paraboloid s temenom v koordinatnem izhodišču,ki bo imel največjo prostornino.

3. Ali konvergirata integrala:
   $$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}\, dx \qquad \text{im} \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,.$$
   Odgovor utemelji.

4. Za katere $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ vrsta
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n}{x^{2n}}$$
   konvergira? Poišči še njeno vsoto.

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE II

Maribor, 08. 07. 2010

1. Z uporabo prvih dveh odvodov nariši graf funcije:

$$f(x) = e^{x+2}\left(\operatorname{ch}(x+1) - 1\right) .$$

2. Dokaži, da za poljuben $x \in [0, 1)$ velja:

$$x \leq \arcsin x \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} .$$

S pomočjo dobljene neenakosti izračunaj limito:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} .$$

3. Izračunaj integral:

$$\int \frac{dx}{\sin x(\cos x + 2)} .$$

4. Dana naj bo vrsta $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$, kjer je zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ podano z rekurzivno formulo:

$$a_1 = 0 \quad \text{in} \quad a_{n+1} = 2a_n + 1 .$$

   (a) Določi konvergenčno območje vrste f.
   (b) Dokaži: $f'(x) - 2f(x) = e^x - 1$.

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE II

Maribor, 19. 08. 2010

1. Dokaži, da ima enačba $e^x = 1 - x$ le eno rešitev. To rešitev tudi poišči. **Pomoč:** uporabi Rolleov izrek.

2. Naj bo $a \geq 0$. Dana je funkcija

$$f(x) = (x+1)^{\frac{a^2+a+1}{a^2+1}} .$$

Za katero vrednost parametra a je ploščina lika, ki ga graf funkcije f oklepa s koordinatnima osema, najmanjša možna? Izračunaj ploščino lika.

3. Naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcijsko zaporedje podano s predpisom

$$f_n(x) = \frac{(n+1)x}{n+1-x^2} .$$

(a) Dokaži, da zaporedje (f_n) konvergira po točkah za vsak $x \in [0,1]$ in določi limitno funkcijo.

(b) Ali zaporedje konvergira enakomerno? Odgovor utemelji.

4. Ugotovi, kje konvergira funkcijska vrsta

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n+1)(n+3)}$$

in na konvergenčnem območju $f(x)$ izrazi z elementarnimi funkcijami.

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE II

Maribor, 02. 09. 2010

1. Naj bo funkcija $f : (0, e] \to \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x) = \ln x$. Poišči tangento na funkcijo f, ki s koordinatnima osema omejuje trikotnik z največjo ploščino.

2. Lik, ki ga oklepata krivulji $x^2+y^2 = 2$ in $y^2 = x$ zavrtimo okoli x-osi. Izračunaj površino dobljenega rotacijskega telesa.

3. Funkcijo $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-4x+4x^2}}$ razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 0$.

4. (a) Določi konvergenčni polmer funkcijske vrste
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{n+1}(x+1)^n .$$
   (b) Izračunaj vsoto vrste
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{(n+1) \cdot 4^n} .$$