

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE II

Maribor, 02. 02. 2011

1. Z uporabo prvih dveh odvodov nariši graf funkcije

$$f(x) = \sqrt{1 - \ln^2 x}.$$

2. V kroglo s polmerom R včrtamo stožec. Določi polmer osnovne ploskve in višino stožca tako, da bo imel največji možni volumen.

3. Integriraj:

$$\int x \cdot \operatorname{ch}(x) dx \quad \text{in} \quad \int \frac{dx}{e^x \cdot \sqrt{1 - e^x}}.$$

4. Naj bo podana funkcijska vrsta

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n x^{2n}}.$$

- (a) Določi konvergenčno območje vrste.

- (b) Izračunaj vsoto vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.

IZPIT IZ ANALIZE II

Maribor, 15. 06. 2011

1. Dokaži, da med poljubnima ničloma enačbe $e^x \sin x = 1$ obstaja vsaj ena ničla enačbe $e^x \cos x = -1$. **Pomoč:** uporabi Rolleov izrek. (20)

2. Dani sta točki $A(1, 1)$ in $B(2, 2)$. Točka C naj leži na grafu funkcije f , podane s predpisom

$$f(x) = x(xe^{-x^2} + 1) - e^{-x^2}.$$

Določi točko C tako, da bo imel trikotnik ABC največjo možno ploščino. (30)

3. Naj bo $I \subseteq \mathbb{R}$ poljuben interval in $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ funkcijsko zaporedje, ki na intervalu I enakomerno konvergira k funkciji f . Dokaži ali ovrzi:

(a) Če je (f_n) zaporedje injektivnih funkcij, potem je injektivna tudi funkcija f . (10)

(b) Če je (f_n) zaporedje omejenih funkcij, potem je omejena tudi funkcija f . (15)

4. Določi konvergenčno območje funkcijske vrste

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n^2 + 4n + 3)}$$

in $f(x)$ na tem območju izrazi z elementarnimi funkcijami. (25)

IZPIT IZ ANALIZE II

Maribor, 29. 06. 2011

1. Pokaži, da ima enačba $x2^x = 1$ rešitev na intervalu $[0, 1]$. Dokaži še, da je to edina rešitev dane enačbe. (20)

2. Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^4}.$$

- (a) S pomočjo prvih dveh odvodov skiciraj graf funkcije f . (10)
(b) Kateri izmed pravokotnikov $ABCD$, ki imajo točko A v izhodišču, točko B na x -osi, točko C na y -osi in točko D na grafu funkcije f , ima največjo ploščino? (20)

3. Za vsako naravno število n je funkcija $f_n : [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{|1 - 2x|}} \right)^{2 + \sin \frac{n\pi}{2}}.$$

Za katere $n \in \mathbb{N}$ bo obstajal integral $\int_0^1 f_n(x) dx$ in kakšna bo njegova vrednost? (25)

4. (a) Naj bo

$$f(x) = \frac{(x - 1)^5}{1 + x}.$$

Izračunaj $f^{(2011)}(1)$. (15)

- (b) Naj bo $a > 0$. S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + x)}{x^3 (a^x - 1)} + \frac{4x + 9}{6x (a^x - 1)} - \frac{(1 - x)^{-1}}{x^2 (a^x - 1)} \right). \quad (10)$$

IZPIT IZ ANALIZE II

Maribor, 07. 09. 2011

1. Naj bo f trikrat zvezno odvedljiva funkcija na intervalu $[0, 1]$. Denimo, da je $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'(1) = f''(1) = 0$ in $f(1) = 1$. Dokaži, da obstaja tak $c \in [0, 1]$, da je $f'''(c) \geq 24$. **Pomoč:** Taylorjeva formula. (25)

2. Za katere vrednosti parametra $a > 1$ bo vrednost integrala

$$\int_a^{a^2} \frac{1}{x} \ln \frac{x-1}{32}$$

najmanjša? Odgovor utemelji. (25)

3. Integriraj

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx \quad \text{in} \quad \int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx. \quad (25)$$

4. (a) Funkcijo $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x}$ razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 1$. Za katere $x \in \mathbb{R}$ dobljena vrsta konvergira? (15)

- (b) Vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n2^n} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right) (x-1)^n$$

izrazi z elementarnimi funkcijami. **Pomoč:** pomagaj si s točko (a). (10)