Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE II

Maribor, 16. 02. 2012

1. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in
$$p_{2n-1}(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \ldots - \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\,.$$
Dokaži, da polinom p_{2n-1} nima več kot ene realne ničle. Koliko realnih ničel potemtakem ima? **Pomoč:** pomagaj si z Rolle-ovim izrekom. (**25**)

2. Dani sta točki $A(1,1)$ in $B(2,2)$. Točka C naj leži na grafu funkcije f, podane s predpisom
$$f(x) = x(xe^{-x^2} + 1) - e^{-x^2}\,.$$
Določi točko C tako, da bo imel trikotnik ABC največjo možno ploščino. (**30**)

3. Naj bo $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ funkcija, za katero je $f(1) = 1$ in za vsak $x \in [1, \infty)$ velja
$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}\,.$$
Dokaži, da $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ obstaja in je največ $1 + \frac{\pi}{4}$. (**20**)

4. Funkcijo $f(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^3}$ razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 0$ in določi konvergenčno območje te vrste. Izračunaj tudi vsoto vrste
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)^2}{9^k}\,.$$
(**25**)

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE II

Maribor, 19. 06. 2012

1. Naj bosta t in n tangenta in normala na graf funkcije $f(x) = x^2$ v točki z absciso $x = 0$. Poišči vse take tangente na funkcijo f, ki s premicama t in n oklepajo trikotnik s ploščino 1. (**25**)

2. Naj bosta $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odvedljivi funkciji in $\phi(x) = f(x)(g(x) + f(x))$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Dokaži, če funkcija f ni injektivna in $f'(x) = g'(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, tedaj obstaja tako število $c \in \mathbb{R}$, da je $\phi'(c) = 0$. (**25**)

3. Izračunaj limiti
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+1}{\cos^2 x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \quad \text{in} \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}\,.$$
(**25**)

4. Funkcijo $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = \frac{1}{2}$ in izračunaj $f^{(2012)}\left(\frac{1}{2}\right)$. (**25**)

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE II

Maribor, 03. 07. 2012

1. Poišči enačbo tiste tangente na graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, ki seka os x najbližje koordinatnemu izhodišču. (**25**)

2. Naj bo t tangetna na parabolo $y^2 = 2(x-1)$ v točki $T(3,2)$. Lik, ki ga omejujejo tangenta t, parabola $y^2 = 2(x-1)$ in os x, zavrtimo okoli osi x. Izračunaj volumen dobljenega rotacijskega telesa. (**25**)

3. Dokaži, da posplošeni integral
$$\int_1^\infty \frac{x}{(x^3-1)^a}\,dx$$
konvergira natanko tedaj, ko je $a \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$. (**25**)

4. Določi konvergenčni polmer funkcijske vrste
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{n+1}(x+2)^n$$
in izračunaj vsoto vrste
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{4^n(n+1)}\,.$$
(**25**)

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ANALIZE II

Maribor, 30. 08. 2012

1. Med vsemi enakokrakimi trikotniki z vrhom v koordinatnem izhodišču in z osnovnico vzporedno osi x, ki ima obe krajišči na grafu funkcije $f(x) = x^{-2}e^{x^2}$, poišči tistega z najmanjšo ploščino. **(25)**

2. Integriraj
$$\int \frac{\ln(3x^2+4)}{6x^2}\,dx \qquad \text{in} \qquad \int \cos(\ln x)\,dx\,.$$ **(25)**

3. Naj bo
$$f_n(x) = \frac{2n+\cos x}{4n+\sin x}\,,$$
kjer je $n \in \mathbb{N}$. Pokaži, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ zaporedje $(f_n(x))$ konvergira in določi limitno funkcijo f. Ali zaporedje (f_n) konvergira proti f enakomerno na $\mathbb{R}$? Odgovor utemelji. **(25)**

4. Funkcijo $f(x) = (1-x^2)\ln(1+x)$ razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 0$ in izračunaj vsoto vrste
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n\,(n^2-1)}\,.$$ **(25)**