Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ELEMENTARNIH FUNKCIJ

Maribor, 02. 02. 2009

1. Naj bo funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ podana s predpisom

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n^2+1}{2} & ; \ n = 2k-1, \ k \in \mathbb{N} \\ \frac{n^3}{2} & ; \ n = 2k, \ k \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

   (a) Ali je funkcija f injektivna oz. surjektivna? Odgovor utemelji.
   (b) Določi predpis funkcije $f \circ f$.

2. Hiperbola ima gorišči v središčih krožnic $x^2 + y^2 \pm 4x + 2 = 0$, asimptoti pa sta notranji skupni tangenti obeh krožnic. Določi enačbo hiperbole in nariši ustrezno sliko.

3. Z ustreznim izračunom ugotovi, ali je funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x}$ konveksna ali konkavna na intervalu $(0, \infty)$.

4. (a) Izračunaj ničle polinomov $p(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ in $q(x) = x^3 - 7x - 6$ ter skiciraj graf funkcije $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$.
   (b) Reši neenačbo $\frac{2x-1}{x^2-x-6} > 0$.

5. (a) Naj bo $0 \leq x \leq \pi$. Poišči predpis funkcije f, za katero velja:

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = f(\cos(x)) .$$

   (b) Reši enačbo:

$$\sin^3 x - 4\sin^2 x \cos x + \sin x \cos^2 x + 6\cos^3 x = 0 .$$

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ELEMENTARNIH FUNKCIJ

Maribor, 16. 02. 2009

1. Dane naj bodo realne funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_n$, definirane na celem $\mathbb{R}$, in naj bo f_i bodisi soda bodisi liha za vsak i.

   (a) Ugotovite z ustreznim računom ob kakšnih pogojih je kompozitum $f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n$ soda funkcija.

   (b) Ugotovite z ustreznim računom ob kakšnih pogojih je produkt $f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$ soda funkcija.

2. Na gradbišču sta dva delavca. Prvi delavec bi za celotno delo porabil 2 uri manj, kot drugi delavec. Potem, ko je prvi delavec delal 5 ur sam, ga je za 6 ur zamenjal drugi delavec. Za tem se mu je pridružil prvi delavec in skupaj sta delo dokončala v 2 urah. Koliko časa bi delavca potrebovala za delo, če bi delala vsak zase?

3. Določi presečišča parabol $y^2 + 4x - 4 = 0$ in $8x^2 - 2x - 3y - 6 = 0$ in preveri, če ležijo vsa na isti krožnici.

4. Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$ in $m \in \mathbb{N}$.

   (a) Pokaži trditev: Če je α^m ničla nekega polinoma z racionalnimi koeficienti, potem je tudi α ničla nekega polinoma z racionalnimi koeficienti.

   (b) Število π je transcendentno (t.j. ne obstaja tak polinom z racionalnimi koeficienti, katerega ničla bi bilo število π). S pomočjo točke (a) pokaži, da je tudi π^2 transcendentno število.

5. Nariši grafa funkcij $f(x) = \ln(x+2)$ in $g(x) = \ln(2x)$.

   (a) Določi vzporednico osi x, ki seka grafa obeh funkcij v točkah, medsebojno oddaljenih za 2.

   (b) Določi vzporednico osi y, ki seka grafa obeh funkcij v točkah, medsebojno oddaljnih za $\frac{1}{2}$.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ELEMENTARNIH FUNKCIJ

Maribor, 15. 06. 2009

1. Dana naj bo funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$ in poljubna točka $x \in D$. V kartezičnem koordinatnem sistemu, v katerem je graf funkcije f, sestavimo krivuljo C_x takole: potegnemo daljico od točke $(x, 0)$ do točke $(x, f(x))$, nato pa jo podaljšamo z daljico od točke $(x, f(x))$ do točke $(0, f(x))$.
   - (a) Koliko skupnih točk imata krivulja C_x in graf funkcije f, če je f injekcija?
   - (b) Naj ima za vsak $x \in D$ krivulja C_x eno skupno točko z grafom funkcije f. Kaj lahko sklepamo od tod o funkciji f?
   - (c) Naj bo f bijekcija. Kaj lahko povemo o množici krivulj $\{C_x \,|\, x \in D\}$ in kaj o njihovi uniji $\bigcup_{x \in D} C_x$?

2. V enakokrak trikotnik včrtamo pravokotnik, tako da ima eno stranico na osnovnici trikotnika, preostali oglišči pa se dotikata krakov trikotnika. Kako moramo včrtati pravokotnik, da bo imel največjo ploščino? Odgovor utemelji.

3. Naj bo dana enačba
$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0\,,$$
kjer so $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$.
   - (a) Zapiši pogoje, katerim morajo zadoščati števila A, B, C, D, E, da bo enačba opisala hiperbolo.
   - (b) Za $A = \frac{1}{9}$, $B = -\frac{1}{16}$, $E = 1$ in $C = D = 0$ nariši ustrezno krivuljo. Naj bosta gorišči te krivulje nasprotni temeni elipse, ki ima eno polos dvakrat večjo od druge. Zapiši enačbo elipse. Koliko rešitev dobiš?

4. Naj bo $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinom z realnimi koeficienti. Izračunaj koeficiente polinoma, ki gre skozi točko $(-2, -9)$, če je $-1 - i\sqrt{2}$ njegova ničla in njegov graf seka ordinatno os pri -3.

5. Naj bo $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$ in $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Natančno izračunaj $\tan\alpha$ in $\cos\frac{\alpha}{2}$.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ELEMENTARNIH FUNKCIJ

Maribor, 29. 06. 2009

1. Določi funkcijo f tako, da bo funkcija $tg \circ f$ imela naravno definicijsko območje $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ in da bo monotono naraščajoča. Ali je f nujno injektivna? Ali lahko namesto pogoja monotonosti zahtevamo, da je f periodična? Odgovor utemelji.

2. Naj bosta funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podani s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} e^x & ; \quad x < 0 \\ 1 - x^2 & ; \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{in} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & ; \quad x < -1 \\ x^3 & ; \quad -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x} & ; \quad x \geq 1 \end{cases} .$$

   Določi predpis za funkciji $f \circ g$ in $g \circ f$.

3. Nariši krivuljo C, ki je podana z enačbo $|y^2 - 2y| - 2x + 3 = 0$. Naj bosta dve oglišči trikotnika v točkah preloma krivulje C. Kje na krivulji C mora ležati tretja točka, da bo trikotnik imel ploščino 4? Koliko rešitev dobiš?

4. Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{cx^2 + dx + e} .$$

   Naj ima funkcija f eno celoštevilsko ničlo in vodoravno asimptoto $y = \frac{1}{2}$. Pol funkije f je v $x = -\frac{1}{2}$, f v $x = 1$ ni definirana in $f(0) = 2$. Določi vse koeficiente funkcije f in reši neenačbo $f(x) \geq 1$.

5. Določi naravna definicijska območja funkcij:

   (a) $\ln(\sqrt{2\sin^2 x + \sin x - 1})$;

   (b) $e^{-\frac{1}{2x^4+7x^3+6x^2-x-2}}$;

   (c) $\underbrace{\ln(\ln(\ln(\ldots \ln x)\ldots))}_{n-\text{krat}}$.

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ELEMENTARNIH FUNKCIJ

Maribor, 17. 08. 2009

1. Naj bo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ strogo naraščajoča funkcija.
   (a) Kaj mora veljati za funkcijo $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, da bo $f\circ g$ strogo padajoča funkcija?
   (b) Ali lahko najdeš primer sode funkcije f?
   (c) Dokaži, da je f injektivna funkcija.

   Opomba: Vse odgovore ustrezno utemelji.

2. Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je podana s predpisom
$$f(x)=\sqrt{1-|x|+|x-1|}\,.$$
   Naj bo $f|[a,b]$ zožitev funkcije f. Poišči največji možni interval $[a,b]$ ter ustrezno zmanjšaj zalogo vrednosti funkcije f, tako da bo $f|[a,b]$ bijektivna funkcija. Nariši njen graf in zapiši predpis funkcije $f^{-1}|[a,b]$.

3. Tangente parabole $y^2=4x$ v točkah $T_1(1,y_1>0)$, $T_2(1,y_2<0)$ in $T_3(9,y_3>0)$ določajo trikotnik $\triangle ABC$.
   (a) Pokaži, da je trikotnik $\triangle ABC$ pravokoten.
   (b) Določi enačbo očrtane krožnice trikotniku $\triangle ABC$.
   (c) Pokaži, da gorišče parabole leži na očrtani krožnici trikotnika $\triangle ABC$.

4. Poišči ničle, pole in asimptote funkcije
$$f(x)=\left|\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-1}\right|$$
   ter nariši njen graf.

5. Za katere vrednosti $a\in\mathbb{R}$ ima enačba
$$\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}-\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}=\sqrt{2}\sqrt{a-1}$$
   rešitev?

Naloge so enakovredne.

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja

IZPIT IZ ELEMENTARNIH FUNKCIJ

Maribor, 31. 08. 2009

1. Naj bo $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, kvadratna funkcija z realnimi koeficienti.
   (a) Izpelji formulo za p in q temena $T(p, q)$.
   (b) Denimo, da je $c = 0$ in $p = q$. Kaj lahko tedaj povemo o temenu kvadratne funkcije? Odgovor utemelji.

2. Za katera realna števila x velja

$$\frac{\left(\sqrt{18} - \sqrt{8} + x\right) \cdot \left(x - \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right)} < 0$$

3. Določi presečišča parabol $y^2 + 4x - 4 = 0$ in $8x^2 - 2x - 3y - 6 = 0$ in preveri, če ležijo vsa na isti krožnici.

4. Naj bo $a \in \mathbb{R}$. Poišči vse ničle polinoma

$$p(x) = x^4 + (2a+6)x^3 + (a^2 + 8a + 13)x^2 + (2a^2 + 12a + 14)x + 2a^2 + 8a + 6\,,$$

   če je ena njegova ničla $x_1 = -1 + i$. Za $a = -2$ nariši njegov graf.

5. Dokaži, da za nobeno realno število x ne velja

$$\frac{1}{9} < \frac{\tan 3x}{\tan 2x} < \frac{3}{2}\,.$$

Naloge so enakovredne.