

1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

Maribor, 23. 04. 2010

1. Adam in Eva izmenično mečeta pošteni igralni kovanec (verjetnost, da pade grb je $\frac{1}{2}$). Če Adam vrže grb, dobi jabolko, sicer ne dobi ničesar. Eva za vržen grb dobi eno jabolko in za cifro izgubi eno jabolko. Zmaga tisti, ki ima prvi dve jabolki prednosti. Na začetku imata oba enako število jabolk. Kolikšna je verjetnost, da zmaga Adam, ki je igro začel? (30)
2. Dana naj bo krožnica s premerom $|AC| = 2r$. Skozi središče krožnice naključno potegnemo premico, ki sega krožnico v točkah B in D . Kolikšna je verjetnost, da bo ploščina štirikotnika $ABCD$ manjša od polovice ploščine največjega tako nastalega štirikotnika? (25)
3. Pošteni igralni kocki mečemo po naslednjem pravilu. Najprej vržemo eno kocko. Če padejo vsaj 4 pike, vržemo še drugo kocko, v nasprotnem primeru druge kocke ne vržemo. Slučajna spremenljivka X naj predstavlja skupno število pik, ki smo jih pri tem dobili. Zapiši verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke X in določi število pik, ki jih lahko v povprečju pričakujemo pri takšni igri. (20)
4. Slučajni vektor (X, Y) je neničelno porazdeljen na kolobarju

$$\{(x, y) \mid x, y \geq 0 \text{ \& } 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}$$

z gostoto verjetnosti, ki je v vsaki točki obratnosorazmerna s kvadratom oddaljenosti te točke od izhodišča.

(a) Zapiši gostoto slučajnega vektorja (X, Y) . (10)

(b) Zapiši porazdelitveno funkcijo in gostoto verjetnosti slučajnega vektorja (Z, W) , kjer je $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ in $W = \sqrt{\frac{Y}{X}}$. Ali sta spremenljivki Z in W neodvisni? Odgovor utemelji. (15)

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE (1. del)

Maribor, 04. 06. 2010

1. Naj bo naključna spremenljivka Y porazdeljena po zakonu $\text{binom}(n, X)$, pri čemer je X porazdeljena enakomerno na intervalu $[0, 1]$. Kako je porazdeljena naključna spremenljivka Y (poimenuj njeno porazdelitev)? Poišči tudi njeno povprečje in disperzijo.
Pomoč: zveza med funkcijama gama in beta

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

2. Pri igri s tremi zaporednimi polji igralec meče pošteni igralni kovanec. Grb igralcu omogoča, da se premakne za eno polje, cifra pa, da eno polje preskoči. Če igralec prehodi vsa tri polja, dobi 10 EUR. Na enem izmed polj je skrita past. Če igralec stopi na past, se igra konča, igralec pa dobi tolažilno nagrado 5 EUR. Kolikšen je pričakovani dobiček igralca pri tej igri?
3. Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ karakteristična funkcija neke porazdelitve. Dokaži, da so tudi \bar{f} , f^2 , $|f|^2$ in $\text{Re}(f)$ karakteristične funkcije.

Opomba. Za reševanje si lahko izbereš poljubni dve nalogi. Vsaka naloga je vredna 25 točk.