Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Enopredmetna matematika

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

Maribor, 16. 06. 2010

1. V žepu imamo tri kovance, dva poštena in enega nepoštenega, katerega verjetnost, da pade grb, je $p \in (0,1)$. Naključno izberemo kovanec in ga vržemo, pri tem pa pade grb. Kolikšna je verjetnost, da smo metali pošten igralni kovanec?

2. Zvezni naključni vektor (X,Y) je porazdeljen z gostoto

$$p(x,y) = \frac{c}{e^{|x|+|y|}}\,.$$

   (a) Izračunaj konstanto c.

   (b) Kako je porazdeljena naključna spremenljivka $Z = X + Y$?

3. V nekem trenutku se na mostu nahaja N tovornjakov. Naj naključna spremenljivka Y_i predstavlja težo i-tega tovornjaka, naključna spremenljivka X pa skupno težo vseh tovornjakov. Denimo, da so naključne spremenljivke N in Y_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, neodvisne ter $E(Y_i) = m$ in $E(N) = n$. Izračunaj $E(X)$.

4. Na vzorcu velikosti 400. voznikov smo zbrali podatke o številu k pristopov k vozniškemu izpitu, preden so pridobili vozniško dovoljenje:

k	1	2	3	4	5	več
št. voznikov	140	110	65	45	10	30

   Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preizkusi domnevo, da je število pristopov k vozniškemu izpitu porazdeljeno geometrijsko s parametrom $p = 0,4$. Denimo, da za povprečno število vrednosti v razredu "več" vzamemo 7. Oceni matematično upanje te porazdelitve in na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ opravi test domneve, da sta za pridobitev vozniškega dovoljenja v povprečju potrebna dva pristopa.

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Enopredmetna matematika

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

Maribor, 30. 06. 2011

1. Naj bo A poljuben dogodek. Dokaži, da sta naslednji trditvi ekvivalentni:

   (a) Dogodka A in B sta neodvisna za poljuben dogodek B,

   (b) $P(A) = 0$ ali $P(A) = 1$.

2. Naj bo $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ funkcija podana s predpisom

   $$f(x) = \frac{x}{1 + x^4}\,.$$

   Na intervalu $[0, 3]$ (na x-osi) naključno izberemo točko X. S pomočjo točke X sestavimo pravokotnik, tako da za stranico a izberemo razdaljo med izhodiščem in točko X, za stranico b pa razdaljo med točko X in njeno funkcijsko vrednostjo. Kolikšna je verjetnost, da bo ploščina takšnega pravokotnika manjša od polovice ploščine največjega tako nastalega pravokotnika.

3. Naj bo realno število $a > 0$ in X naključna spremenljivka z gostoto

   $$p(x) = \frac{1}{2} a e^{-a|x|}\,.$$

   (a) Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.

   (b) Kako je porazdeljena naključna spremenljivka $Y = e^X$?

4. Na vzorcu velikosti $n = 160$ zaposlenih v podjetjih v Sloveniji, so ugotovili, da je vzorčna povprečna starost anketirancev $\overline{X} = 39,5$ let in vrednost cenilke za vzorčni standardni odklon znaša $S = 9,8$ let.

   (a) Na stopnji zaupanja $1 - \alpha = 0,95$ določi interval zaupanja za povprečno starost zaposlenih v podjetjih v Sloveniji.

   (b) V Sloveniji je v podjetjih 25% zaposlenih žensk. Vsaj kolikšna naj bo velikost vzorca, da bo ob tveganju $\alpha = 0,05$ vzorčni delež zaposlenih žensk ležal v območju $25\% \pm 2\%$?

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Enopredmetna matematika

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

Maribor, 30. 06. 2011

1. Naj bo A poljuben dogodek. Dokaži, da sta naslednji trditvi ekvivalentni:
   (a) Dogodka A in B sta neodvisna za poljuben dogodek B,
   (b) $P(A) = 0$ ali $P(A) = 1$.

2. Naj bo $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ funkcija podana s predpisom
$$f(x) = \frac{x}{1 + x^4}\,.$$
   Na intervalu $[0, 3]$ (na x-osi) naključno izberemo točko X. S pomočjo točke X sestavimo pravokotnik, tako da za stranico a izberemo razdaljo med izhodiščem in točko X, za stranico b pa razdaljo med točko X in njeno funkcijsko vrednostjo. Kolikšna je verjetnost, da bo ploščina takšnega pravokotnika manjša od polovice ploščine največjega tako nastalega pravokotnika.

3. Naj bo realno število $a > 0$ in X naključna spremenljivka z gostoto
$$p(x) = \frac{1}{2} a e^{-a|x|}\,.$$
   (a) Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.
   (b) Kako je porazdeljena naključna spremenljivka $Y = e^X$?

4. Na vzorcu velikosti $n = 160$ zaposlenih v podjetjih v Sloveniji, so ugotovili, da je vzorčna povprečna starost anketirancev $\overline{X} = 39,5$ let in vrednost cenilke za vzorčni standardni odklon znaša $S = 9,8$ let.
   (a) Na stopnji zaupanja $1-\alpha = 0,95$ določi interval zaupanja za povprečno starost zaposlenih v podjetjih v Sloveniji.
   (b) V Sloveniji je v podjetjih 25% zaposlenih žensk. Vsaj kolikšna naj bo velikost vzorca, da bo ob tveganju $\alpha = 0,05$ vzorčni delež zaposlenih žensk ležal v območju $25\% \pm 2\%$?

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja (splošna smer)

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 03. 02. 2011

1. V prvi posodi imamo 2 beli in 3 črne kroglice, v drugi posodi 1 belo in 2 črni kroglici in v tretji posodi 4 bele in 2 črni kroglici. Najprej naključno prenesemo kroglico iz prve v drugo posodo, nato pa kroglico iz druge v tretjo posodo. Nazadnje izberemo kroglico iz tretje posode.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da je na koncu izbrana kroglica črna?

   (b) Če vemo, da je na koncu bila izbrana črna kroglica, kolikšna je tedaj verjetnost, da smo iz prve v drugo posodo prenesli belo kroglico?

2. V posodi imamo 3 modre in 2 zelena bombona. Naključno izberemo dva bombona iz posode in ju vrnemo nazaj v posodo. Naključna spremenljiva X meri število izbir, ki jih potrebujemo, da prvič izvlečemo oba zelena bombona.

   (a) Zapiši rodovno funkcijo G_X v zaključeni obliki.

   (b) Izračunaj matematično upanje in disperzijo.

3. Naključni vektor (X, Y) je porazdeljen z gostoto

$$p(x,y) = \begin{cases} c \cdot y^2 e^{-2x} & ; \quad x \geq 0,\ -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases} .$$

   (a) Določi konstanto c.

   (b) Izračunaj porazdelitveno funkcijo $F_{(X,Y)}$ ter robni porazdelitvi p_X in p_Y.

   (c) Določi gostoto naključne spremenljivke $Z = X + Y$.

4. Število napak, ki jih tiskalnik naredi pri tisku ene strani je vrednost naključne spremenljivke X, ki je porazdeljena Poissonovo, t.j. $P[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Z enim izmed štirih tiskalnikov, katerih vrednosti za λ so po vrsti $1, 2, 3$ in 4, natisnemo tristranski članek. Tiskalnik izberemo naključno z enakomerno verjetnostjo. Kolikšno je pričakovano število napak, ki jih bo imel članek?

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja (splošna smer)

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 16. 06. 2011

1. V žepu imamo tri kovance, dva poštena in enega nepoštenega, katerega verjetnost, da pade grb, je $p \in (0,1)$. Naključno izberemo kovanec in ga vržemo, pri tem pa pade grb. Kolikšna je verjetnost, da smo metali pošten igralni kovanec?

2. (a) Naj bosta naključni spremenljivki X in Y porazdeljeni binomsko, $X \sim b(n,p)$ in $Y \sim b(n, 1-p)$. Dokaži, da za $k = 0, 1, \dots, n$ velja

$$P(X = k) = P(Y = n - k)\,.$$

   (b) Naj bo $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje naključnih spremenljivk porazdeljenih binomsko, $X_n \sim b\left(n, \frac{\lambda}{n}\right), \lambda > 0$. Dokaži, da velja

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_n = k\right) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\,.$$

3. Zvezni naključni vektor (X, Y) je porazdeljen z gostoto

$$p(x,y) = \frac{c}{e^{|x|+|y|}}\,.$$

   (a) Izračunaj konstanto c.

   (b) Kako je porazdeljena naključna spremenljivka $Z = X + Y$?

4. V nekem trenutku se na mostu nahaja N tovornjakov. Naj naključna spremenljivka Y_i predstavlja težo i-tega tovornjaka, naključna spremenljivka X pa skupno težo vseh tovornjakov. Denimo, da so naključne spremenljivke N in Y_i, $i = 1, 2, \dots, N$, neodvisne ter $E(Y_i) = m$ in $E(N) = n$. Izračunaj $E(X)$.

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja (splošna smer)

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 30. 06. 2011

1. Naj bo A poljuben dogodek. Dokaži, da sta naslednji trditvi ekvivalentni:
   (a) Dogodka A in B sta neodvisna za poljuben dogodek B,
   (b) $P(A) = 0$ ali $P(A) = 1$.

2. Naj bo $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ funkcija podana s predpisom
$$f(x) = \frac{x}{1+x^4}\,.$$
   Na intervalu $[0,3]$ (na x-osi) naključno izberemo točko X. S pomočjo točke X sestavimo pravokotnik, tako da za stranico a izberemo razdaljo med izhodiščem in točko X, za stranico b pa razdaljo med točko X in njeno funkcijsko vrednostjo. Kolikšna je verjetnost, da bo ploščina takšnega pravokotnika manjša od polovice ploščine največjega tako nastalega pravokotnika.

3. Naj bo realno število $a > 0$ in X naključna spremenljivka z gostoto
$$p(x) = \frac{1}{2}ae^{-a|x|}\,.$$
   (a) Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.
   (b) Kako je porazdeljena naključna spremenljivka $Y = e^X$?

4. Na srečelovu kupimo Y srečk, kjer je Y porazdeljena Poissonovo s parametrom λ. Vsaka srečka zadane nagrado z verjetnostjo p neodvisno od ostalih srečk. Izračunaj pričakovano število nagrad, ki jih bomo na srečelovu zadeli.

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja (splošna smer)

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 08. 09. 2011

1. V mestnem kinu imajo tri dvorane. V prvi gleda film 20 moških in 30 žensk, v drugi je 30 moških in 40 žensk, v zadnji pa je 40 moških in 30 žensk. Direktor se je odločil, da na slepo izbere dvorano in v njej zaseden sedež. Oseba, ki na njem sedi, bo lahko teden dni (v reklamne namene) brezplačno uporabljala nov model avtomobila BMW. Kolikšna je verjetnost dogodka, da bo to ženska? In, če je nagrado dobila ženska, kolikšna je verjetnost, da je gledala film v drugi dvorani?

2. Z intervala $[0, 1]$ naključno in neodvisno izberemo 3 števila. Kolikšna je geometrijska verjetnost, da njihova vsota leži na intervalu $[1, 2]$? Koliškna je ta verjetnost, če je eno izmed števil manjše od $\frac{1}{2}$?

3. Naključni vektor (X, Y) je porazdeljen na območju $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq y \leq 1\}$ z gostoto verjetnosti, ki je premosorazmerna s kvadratom oddaljenosti točke (x, y) od izhodišča.

   (a) Zapiši gostoto verjetnosti naključnega vektorja (X, Y).

   (b) Izračunaj gostoto porazdelitve pogojne naključne spremenljivke $Y|X$ in izračunaj regresijo $E(Y|X)$.

4. Naj imata slučajni spremenljivki X in Y karakteristični funkciji

$$f_X(t) = \frac{1}{2e^{-it-1}} \quad \text{in} \quad f_Y(t) = \frac{1}{1 - it}\,.$$

   (a) Zapiši porazdelitev naključne spremenljivke X.

   (b) Izračunaj začetne momente slučajne spremenljivke Y. Ugotovi, kako je porazdeljena naključna spremenljivka Y?

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja (uporabna smer)

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 03. 02. 2011

1. V prvi posodi imamo 2 beli in 3 črne kroglice, v drugi posodi 1 belo in 2 črni kroglici in v tretji posodi 4 bele in 2 črni kroglici. Najprej naključno prenesemo kroglico iz prve v drugo posodo, nato pa kroglico iz druge v tretjo posodo. Nazadnje izberemo kroglico iz tretje posode. Kolikšna je verjetnost, da je na koncu izbrana kroglica črna?

2. V posodi imamo 3 modre in 2 zelena bombona. Naključno izberemo dva bombona in posode in ju vrnemo nazaj v posodo. Naključna spremenljiva X meri število izbir, ki jih potrebujemo, da prvič izvlečemo oba zelena bombona.
   (a) Zapiši rodovno funkcijo G_X v zaključeni obliki.
   (b) Izračunaj matematično upanje in disperzijo.

3. Naključni vektor (X, Y) je porazdeljen z gostoto
$$p(x,y) = \begin{cases} c \cdot y^2 e^{-2x} & ; \quad x \geq 0,\ -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases} .$$
   (a) Določi konstanto c in izračunaj porazdelitveno funkcijo $F_{(X,Y)}$
   (b) Izračunaj regresijo $E(X|Y)$.

4. Število napak, ki jih tiskalnik naredi pri tisku ene strani je vrednost naključne spremenljivke X, ki je porazdeljena Poissonovo, t.j. $P[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Z enim izmed štirih tiskalnikov, katerih vrednosti za λ so po vrsti $1, 2, 3$ in 4, natisnemo tristranski članek. Tiskalnik izberemo naključno z enakomerno verjetnostjo. Kolikšno je pričakovano število napak, ki jih bo imel članek?

5. Navijač gre vsak teden bodisi na nogometno bodisi na košarkaško tekmo, vendar na košarkaško tekmo nikoli ne gre dva tedna zapored. Če gre en teden na nogometno tekmo, je enako verjetno, da bo naslednji teden šel na nogometno ali košarkaško tekmo.
   (a) Obisk tekem predstavi z markovsko verigo (zapiši matriko prehoda).
   (b) Ta teden je bil navijač na nogometni tekmi. Kolikšna je verjetnost, da bo po n-tednih spet na nogometni tekmi?

Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika 1. stopnja (uporabna smer)

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 30. 06. 2011

1. Naj bo A poljuben dogodek. Dokaži, da sta naslednji trditvi ekvivalentni:
   (a) Dogodka A in B sta neodvisna za poljuben dogodek B,
   (b) $P(A) = 0$ ali $P(A) = 1$.

2. Naj bo $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ funkcija podana s predpisom
$$f(x) = \frac{x}{1+x^4}\,.$$
   Na intervalu $[0,3]$ (na x-osi) naključno izberemo točko X. S pomočjo točke X sestavimo pravokotnik, tako da za stranico a izberemo razdaljo med izhodiščem in točko X, za stranico b pa razdaljo med točko X in njeno funkcijsko vrednostjo. Kolikšna je verjetnost, da bo ploščina takšnega pravokotnika manjša od polovice ploščine največjega tako nastalega pravokotnika.

3. Naj bo realno število $a > 0$ in X naključna spremenljivka z gostoto
$$p(x) = \frac{1}{2} a e^{-a|x|}\,.$$
   (a) Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.
   (b) Kako je porazdeljena naključna spremenljivka $Y = e^X$?

4. Na srečelovu kupimo Y srečk, kjer je Y porazdeljena Poissonovo s parametrom λ. Vsaka srečka zadane nagrado z verjetnostjo p neodvisno od ostalih srečk. Izračunaj pričakovano število nagrad, ki jih bomo na srečelovu zadeli.

5. V ribniku živi žaba, ki jo lahko najdemo v vodi, v čolnu, na kopnem ali na lokvanju. Če je žaba v čolnu, bo skočila z enako verjetnostjo bodisi na kopno bodisi na lokvanj. Iz lokvanja skoči žaba bodisi v čoln bodisi v vodo. Iz vode z enako verjetnostjo skoči na lokvanj ali na kopno ali v čoln. Če je žaba na kopnem, bo skočila v čoln ali v vodo. S kolikšno verjetnostjo se žaba po dveh skokih nahaja v posameznem stanju, če je na začetku enako verjetno, da je v čolnu ali na lokvanju.