

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

Maribor, 31. 01. 2012

1. Na voljo imamo kovanca tipa K_1 in K_2 , katerih verjetnost, da pade grb, je p_1 in p_2 .
 - (a) Istočasno vržemo oba kovanca. Verjetnost, da je pri tem padel vsaj en grb, je $\frac{1}{2}$, da je padla vsaj ena cifra pa $\frac{11}{12}$. Izračunaj verjetnosti p_1 in p_2 . **(15)**
 - (b) Istočasno vržemo tri kovanca tipa K_1 in dva kovanca tipa K_2 . Izračunaj verjetnost, da so padli trije grbi in dve cifri, če vemo, da sta padla vsaj en grb in vsaj ena cifra. **(10)**

2. Mesti A in B sta 50km narazen. Dva avtomobila zapustita vsak svoje mesto neodvisno drug od drugega. Čas odhoda obeh avtomobilov je naključen in enakomerno porazdeljen med 12. in 13. uro. Hitrost obeh avtomobilov je $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in oba potujeta drug proti drugemu. Naj naključna spremenljivka X meri razdaljo med točko srečanja obeh avtomobilov in mestom A . Izračunaj porazdelitveno funkcijo F_X in jo skiciraj. Kolikšna je pričakovana razdalja med točko srečanja in mestom A ? **(25)**

3. Naključni vektor (X, Y) je enakomerno porazdeljen na polkrogu $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$.
 - (a) Določi gostoto porazdelitve naključne spremenljivke $Y|X$. **(10)**
 - (b) Izračunaj regresijo $E(Y|X)$ in jo natančno skiciraj. Na kateri znani krivulji leži regresija? Odgovor utemelji. **(15)**

4. Na vzorcu neke normalno porazdeljene količine so ugotovili vzorčno povprečje $\bar{x} = 8,5$ in izračunali $\sum (x_k - \bar{x})^2 = 15$. S temi podatki na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testiramo hipotezo $H_0(\mu = 9)$ proti alternativni hipotezi $H_1(\mu \neq 9)$. Ali je potrebno hipotezo zavrniti, če je velikost vzorca $n = 19$ oz. $n = 30$? **(25)**

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

Maribor, 19. 06. 2012

1. Na intervalu $[0, l]$, $l > 0$, naključno in neodvisno izberemo dve števili, ki interval razdelita na tri dele. Kolikšna je verjetnost, da je sredinski del (del med izbranimi številoma) največji, levi del (del, ki vsebuje število 0) pa najmanjši? (25)

2. Dogodek A ima v poskusu X verjetnost $p \in (0, 1)$. Poskus ponavljamo tako dolgo, da se dogodek A zgodi k -krat. Določi rodovno funkcijo naključne spremenljivke X in izračunaj kolikokrat je v povprečju potrebno ponoviti poskus X , da se dogodek A zgodi k -krat. (25)

3. Naj bo naključni vektor (X, Y) porazdeljen na kvadratu $[0, 1] \times [0, 1]$ z gostoto verjetnosti, ki je premosorazmerna s kvadratom oddaljenosti točke od izhodišča.
 - (a) Zapiši gostoto verjetnosti naključnega vektorja (X, Y) . (5)
 - (b) Izračunaj $P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4} \mid Y = \frac{1}{2}\right)$. (10)
 - (c) Izračunaj regresijo $E(X|Y)$. (10)

4. Izmed prvih 800 cifer števila π so se cifre $0, 1, 2, \dots, 9$ pojavile po vrsti
 $74, 92, 79, 80, 77, 75, 76, 91, 82, 74$
krat. Na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ preveri hipotezo, da imajo vse cifre enako verjetnost pojavljanja. (25)

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

Maribor, 03. 07. 2012

1. V posodi imamo 5 belih, 3 zelene in 4 črne kroglice. Soigralec iz posode izvleče eno kroglico in je ne vrne. Nato izvleče še dve kroglici in nam pove, da sta enake barve. Kolikšna je verjetnost, da je bila prva izvlečena kroglica bele barve? **(25)**
2. Podana so števila $1, 2, \dots, n$. Naključno in neodvisno izberemo k števil (ne nujno različnih). Največje izmed izbranih števil je vrednost naključne spremenljivke X . Katere vrednosti zavzame naključna spremenljivka X ? Zapiši tudi verjetnostno in porazdelitveno funkcijo naključne spremenljivke X . **(25)**
3. Naključni spremenljivki X in Y sta neodvisni in enakomerno porazdeljeni na intervalu $[0, 1]$. Naj bosta $U = \min\{X, Y\}$ in $V = \max\{X, Y\}$.
 - (a) Določi gostoto porazdelitve naključne spremenljivke V , vektorja (U, V) in pogojne spremenljivke $U|V$. **(15)**
 - (b) Izračunaj regresijsko funkcijo naključne spremenljivke U glede na naključno spremenljivko V . **(10)**
4. Istočasno vržemo 5 kovancev in štejemo število padlih grbov. V tabeli

x_i	0	1	2	3	4	5
m_i	7	41	98	114	54	6

so rezultati po 320-tih metih, kjer je m_i število metov v katerih se pojavi x_i grbov. Ali lahko na stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ zavrnamo hipotezo, da so kovanci pošteni? **(25)**

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

Maribor, 22. 08. 2012

1. Z intervala $[0, 1]$ naključno in neodvisno izberemo tri števila x, y in z . Označimo naslednja dogodka:

A : s stranicami, ki imajo dolžine x, y in z ni možno sestaviti trikotnika,

B : vsota $x + y + z$ je manjša od 1.

Izračunaj verjetnost $P(A)$ in $P(A|B)$. (25)

2. Naj bo zvezna naključna spremenljivka podana z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} 25ax(5x - 7)^7 + \frac{25}{18} & ; \quad \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}.$$

(a) Določi konstanto a . (5)

(b) Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$ naključne spremenljivke X . (10)

(c) Kako je porazdeljena naključna spremenljivka $Y = \ln X$? (10)

3. Nenegativni celoštevilski naključni spremenljivki X in Y sta neodvisni. Naključna spremenljivka X ima rodovno funkcijo $G_X(t) = \frac{2t}{3-t}$, Y pa ima karakteristično funkcijo $f_Y(t) = (2e^{-it} - 1)^{-1}$.

(a) Kako sta porazdeljeni naključni spremenljivki X in Y ? (15)

(b) Zapiši rodovno funkcijo naključne spremenljivke $Z = X + Y$. (10)

4. Naključna spremenljivka X naj bo porazdeljena normalno $N(\mu, \sigma)$ z znanim $\sigma = 2$. Po 25-tih realizacijah X smo dobili navednje podatke:

x_i	-3	-2	-1	0	1	2
n_i	3	5	6	7	1	3

kjer je n_i število realizacij vrednosti x_i . Ali lahko na osnovi teh podatkov s tveganjem $\alpha = 0.05$ zavrnamo hipotezo, da je $\mu = 0$? Določi tudi 95% interval zaupanja za μ . (25)

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 31. 01. 2012

- Na voljo imamo kovanca tipa K_1 in K_2 , katerih verjetnost, da pade grb, je p_1 in p_2 .
 - Istočasno vržemo oba kovanca. Verjetnost, da je pri tem padel vsaj en grb, je $\frac{1}{2}$, da je padla vsaj ena cifra pa $\frac{11}{12}$. Izračunaj verjetnosti p_1 in p_2 . (15)
 - Istočasno vržemo tri kovanca tipa K_1 in dva kovanca tipa K_2 . Izračunaj verjetnost, da so padli trije grbi in dve cifri, če vemo, da sta padla vsaj en grb in vsaj ena cifra. (10)
- Mesti A in B sta $50km$ narazen. Dva avtomobila zapustita vsak svoje mesto neodvisno drug od drugega. Čas odhoda obeh avtomobilov je naključen in enakomerno porazdeljen med 12. in 13. uro. Hitrost obeh avtomobilov je $100\frac{km}{h}$ in oba potujeta drug proti drugemu. Naj naključna spremenljivka X meri razdaljo med točko srečanja obeh avtomobilov in mestom A . Izračunaj porazdelitveno funkcijo F_X in jo skiciraj. Kolikšna je pričakovana razdalja med točko srečanja in mestom A ? (25)
- Naključni vektor (X, Y) je enakomerno porazdeljen na polkrogu $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$.
 - Določi gostoto porazdelitve naključne spremenljivke $Y|X$. (10)
 - Izračunaj regresijo $E(Y|X)$ in jo natančno skiciraj. Na kateri znani krivulji leži regresija? Odgovor utemelji. (15)
- Iz posode, ki vsebuje pet kroglic označenih z 1, 2, 3, 4 in 5 (vsaka kroglica je označena s svojo številko), potegnemo dve kroglici. Če potegnemo vsaj eno kroglico s številko vsaj 3, dobimo 1 EUR, v nasprotnem primeru 1 EUR izgubimo. Kolikšen je pričakovan zaslužek? (25)

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 19. 06. 2012

1. Na intervalu $[0, l]$, $l > 0$, naključno in neodvisno izberemo dve števili, ki interval razdelita na tri dele. Kolikšna je verjetnost, da je sredinski del (del med izbranimi številoma) največji, levi del (del, ki vsebuje število 0) pa najmanjši? **(25)**
2. Naključni spremenljivki X in Y sta neodvisni in obe porazdeljeni z gostoto $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Določi gostoto verjetnosti naključnih spremenljivk $U = |X - Y|$ in $V = \max\{X, Y\}$. **(20)**
3. Dogodek A ima v poskusu X verjetnost $p \in (0, 1)$. Poskus ponavljamo tako dolgo, da se dogodek A zgodi k -krat. Določi rodovno funkcijo naključne spremenljivke X in izračunaj kolikor je v povprečju potrebno ponoviti poskus X , da se dogodek A zgodi k -krat. **(25)**
4. Naj bo naključni vektor (X, Y) porazdeljen na kvadratu $[0, 1] \times [0, 1]$ z gostoto verjetnosti, ki je premosorazmerna s kvadratom oddaljenosti točke od izhodišča.
 - (a) Zapiši gostoto verjetnosti naključnega vektorja (X, Y) . **(10)**
 - (b) Izračunaj $P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4} \mid Y = \frac{1}{2}\right)$. **(10)**
 - (c) Izračunaj regresijo $E(X|Y)$. **(10)**

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 03. 07. 2012

1. V posodi imamo 5 belih, 3 zelene in 4 črne kroglice. Soigralec iz posode izvleče eno kroglico in je ne vrne. Nato izvleče še dve kroglici in nam pove, da sta enake barve. Kolikšna je verjetnost, da je bila prva izvlečena kroglica bele barve? **(25)**
2. Podana so števila $1, 2, \dots, n$. Naključno in neodvisno izberemo k števil (ne nujno različnih). Največje izmed izbranih števil je vrednost naključne spremenljivke X . Katere vrednosti zavzame naključna spremenljivka X ? Zapiši tudi verjetnostno in porazdelitveno funkcijo naključne spremenljivke X . **(25)**

3. Naj bosta naključni spremenljivki X in Y neodvisni in obe porazdeljeni z gostoto

$$p(x) = a|x|^2 e^{-x^2}.$$

- (a) Izračunaj konstanto a in k -ti začetni moment spremenljivke X . Koliko je $E(X)$ in $D(X)$? **(15)**
 - (b) Zapiši gostoto naključne spremenljivke $Z = \max\{X, Y\}$. **(10)**
4. Naključni spremenljivki X in Y sta neodvisni in enakomerno porazdeljeni na intervalu $[0, 1]$. Naj bosta $U = \min\{X, Y\}$ in $V = \max\{X, Y\}$.
 - (a) Določi gostoto porazdelitve naključne spremenljivke V , vektorja (U, V) in pogojne spremenljivke $U|V$. **(15)**
 - (b) Izračunaj regresijsko funkcijo naključne spremenljivke U glede na naključno spremenljivko V . **(10)**

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 22. 08. 2012

1. V posodi imamo 5 belih, 3 zelene in 4 črne kroglice. Soigralec iz posode izvleče eno kroglico in je ne vrne. Nato izvleče še dve kroglici in nam pove, da sta enake barve. Kolikšna je verjetnost, da je bila prva izvlečena kroglica bele barve? **(25)**

2. Z intervala $[0, 1]$ naključno in neodvisno izberemo tri števila x , y in z . Označimo naslednja dogodka:

A : s stranicami, ki imajo dolžine x , y in z ni možno sestaviti trikotnika,

B : vsota $x + y + z$ je manjša od 1.

Izračunaj verjetnost $P(A)$ in $P(A|B)$. **(25)**

3. Naj bo zvezna naključna spremenljivka podana z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} 25ax(5x - 7)^7 + \frac{25}{18} & ; \quad \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases} .$$

(a) Določi konstanto a . **(5)**

(b) Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$ naključne spremenljivke X . **(10)**

(c) Kako je porazdeljena naključna spremenljivka $Y = \ln X$? **(10)**

4. Nenegativni celoštevilski naključni spremenljivki X in Y sta neodvisni. Naključna spremenljivka X ima rodovno funkcijo $G_X(t) = \frac{2t}{3-t}$, Y pa ima karakteristično funkcijo $f_Y(t) = (2e^{-it} - 1)^{-1}$.

(a) Kako sta porazdeljeni naključni spremenljivki X in Y ? **(15)**

(b) Zapiši rodovno funkcijo naključne spremenljivke $Z = X + Y$. **(10)**

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 31. 01. 2012

- Na voljo imamo kovanca tipa K_1 in K_2 , katerih verjetnost, da pade grb, je p_1 in p_2 .
 - Istočasno vržemo oba kovanca. Verjetnost, da je pri tem padel vsaj en grb, je $\frac{1}{2}$, da je padla vsaj ena cifra pa $\frac{11}{12}$. Izračunaj verjetnosti p_1 in p_2 . **(15)**
 - Istočasno vržemo tri kovanca tipa K_1 in dva kovanca tipa K_2 . Izračunaj verjetnost, da so padli trije grbi in dve cifri. **(5)**
- Mesti A in B sta 50km narazen. Dva avtomobila zapustita vsak svoje mesto neodvisno drug od drugega. Čas odhoda obeh avtomobilov je naključen in enakomerno porazdeljen med 12. in 13. uro. Hitrost obeh avtomobilov je $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in oba potujeta drug proti drugemu. Naj naključna spremenljivka X meri razdaljo med točko srečanja obeh avtomobilov in mestom A . Izračunaj porazdelitveno funkcijo F_X in jo skiciraj. **(20)**
- Naključni vektor (X, Y) je enakomerno porazdeljen na polkrogu $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$.
 - Določi gostoto porazdelitve naključne spremenljivke $Y|X$. **(5)**
 - Izračunaj regresijo $E(Y|X)$. **(10)**
- Iz posode, ki vsebuje pet kroglic označenih z 1, 2, 3, 4 in 5 (vsaka kroglica je označena s svojo številko), potegnemo dve kroglici. Če potegnemo vsaj eno kroglico s številko vsaj 3, dobimo 1 EUR, v nasprotnem primeru 1 EUR izgubimo. Kolikšen je pričakovan zaslužek? **(20)**
- Janko hodi enkrat na teden bodisi v kino bodisi v gledališče. Če je nek teden šel v kino, bo tudi naslednji teden šel v kino z verjetnostjo $\frac{1}{5}$. Če pa je šel v gledališče, bo tudi naslednji teden šel v gledališče z verjetnostjo $\frac{3}{4}$.
 - Jankovo tedensko odločitev predstavi z markovsko verigo. **(5)**
 - Kolikšna je verjetnost, da bo po n tednih Janko šel v gledališče, če je ta teden šel v gledališče? **(10)**
 - Klasificiraj obe stanji markovske verige. **(10)**

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 19. 06. 2012

1. Na intervalu $[0, l]$, $l > 0$, naključno in neodvisno izberemo dve števili, ki interval razdelita na tri dele. Kolikšna je verjetnost, da je sredinski del (del med izbranimi številoma) največji, levi del (del, ki vsebuje število 0) pa najmanjši? **(20)**
2. Naključni spremenljivki X in Y sta neodvisni in obe porazdeljeni z gostoto $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Določi gostoto verjetnosti naključnih spremenljivk $U = |X - Y|$ in $V = \max\{X, Y\}$. **(20)**
3. Dogodek A ima v poskusu X verjetnost $p \in (0, 1)$. Poskus ponavljamo tako dolgo, da se dogodek A zgodi k -krat. Določi rodovno funkcijo naključne spremenljivke X . **(20)**
4. Naj bo naključni vektor (X, Y) porazdeljen na kvadratu $[0, 1] \times [0, 1]$ z gostoto verjetnosti, ki je premosorazmerna s kvadratom oddaljenosti točke od izhodišča.
 - (a) Zapiši gostoto verjetnosti naključnega vektorja (X, Y) . **(10)**
 - (b) Izračunaj regresijo $E(X|Y)$. **(10)**
5. Trgovec vsak dan obiše eno izmed mest Ljubljana, Maribor in Celje. Če je bil nek dan v Mariboru ali v Celju, gre naslednji dan vedno v Ljubljano. Če je bil v Ljubljani, pa je enakoverjetno, da bo naslednji dan v Mariboru ali v Celju.
 - (a) Gibanje trgovca predstavi z markovsko verigo. Zapiši matriko prehoda P in matriko P^n . **(10)**
 - (b) Klasificiraj stanja markovske verige. Ali obstaja stacionarna porazdelitev? **(10)**

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 03. 07. 2012

1. V posodi imamo 5 belih, 3 zelene in 4 črne kroglice. Soigralec iz posode izvleče eno kroglico in je ne vrne. Nato izvleče še dve kroglici in nam pove, da sta enake barve. Kolikšna je verjetnost, da je bila prva izvlečena kroglica bele barve? **(20)**
2. Podana so števila $1, 2, \dots, n$. Naključno in neodvisno izberemo k števil (ne nujno različnih). Največje izmed izbranih števil je vrednost naključne spremenljivke X . Katere vrednosti zavzame naključna spremenljivka X ? Zapiši tudi verjetnostno funkcijo naključne spremenljivke X . **(20)**
3. Naj bosta naključni spremenljivki X in Y neodvisni in obe porazdeljeni z gostoto

$$p(x) = a|x|^2e^{-x^2}.$$

- (a) Izračunaj konstanto a . **(10)**
 - (b) Zapiši gostoto naključne spremenljivke $Z = \max\{X, Y\}$. **(10)**
4. Naključni spremenljivki X in Y sta neodvisni in enakomerno porazdeljeni na intervalu $[0, 1]$. Naj bosta $U = \min\{X, Y\}$ in $V = \max\{X, Y\}$. Določi gostoto porazdelitve naključne spremenljivke V , vektorja (U, V) in pogojne spremenljivke $U|V$. **(20)**
 5. Delec se giblje po mreži trikotnika $\triangle ABC$. Iz oglišča A se delec vedno premakne v oglišče B . Če je delec v oglišču B , potem z verjetnostjo p ostane v oglišču B ali pa se premakne v oglišče C . Če je delec v oglišču C , potem je enakoverjetno, da v C tudi ostane ali pa se premakne v A . Gibanje delca opiši s homogeno markovsko verigo in za vsako oglišče trikotnika izračunaj povprečen čas vrnitve delca. **(20)**

IZPIT IZ VERJETNOSTI

Maribor, 22. 08. 2012

1. V posodi imamo 5 belih, 3 zelene in 4 črne kroglice. Soigralec iz posode izvleče eno kroglico in je ne vrne. Nato izvleče še dve kroglici in nam pove, da sta enake barve. Kolikšna je verjetnost, da je bila prva izvlečena kroglica bele barve? **(20)**

2. Z intervala $[0, 1]$ naključno in neodvisno izberemo tri števila x , y in z . Označimo naslednja dogodka:

A : s stranicami, ki imajo dolžine x , y in z ni možno sestaviti trikotnika,

B : vsota $x + y + z$ je manjša od 1.

Izračunaj verjetnost $P(A|B)$. **(20)**

3. Naj bo zvezna naključna spremenljivka podana z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} 25ax(5x - 7)^7 + \frac{25}{18} & ; \quad \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases} .$$

(a) Določi konstanto a . **(5)**

(b) Kako je porazdeljena naključna spremenljivka $Y = \ln X$? **(10)**

4. Nenegativni celoštevilski naključni spremenljivki X in Y sta neodvisni. Naključna spremenljivka X ima rodovno funkcijo $G_X(t) = \frac{2t}{3-t}$, Y pa ima karakteristično funkcijo $f_Y(t) = (2e^{-it} - 1)^{-1}$.

(a) Kako sta porazdeljeni naključni spremenljivki X in Y ? **(15)**

(b) Zapiši rodovno funkcijo naključne spremenljivke $Z = X + Y$. **(10)**

5. Delec se premika po naravnih številih 1, 2, 3, 4 in 5. Na začetku delec stoji na številu 1 in se na vsakem koraku enakoverjetno premakne do kateregakoli naravnega števila, ki je strogo večje od števila, na katerem v danem trenutku stoji. Ko delec prispe do števila 5, tam tudi ostane. Zapiši matriko prehoda tega procesa in določi pričakovano število korakov, v katerih delec doseže število 5. **(20)**