Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika, 1. stopnja

Drugi delni test pri predmetu

TEORIJA MNOŽIC

Maribor, 12. 6. 2015

1. **[25]** Naj bo $f : A \to B$ funkcija. Vsako izmed naslednjih dveh trditev dokaži ali pa s protiprimerom ovrzi:

   a) Če je množica A števna, je tudi $f(A)$ števna.

   b) Če je množica B števna, je tudi $f^{-1}(B)$ števna.

   Rešitev:

   a) Trditev velja. Prvi način dokaza: Ker je A števna, obstaja surjekcija $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$. Naj bo še $f' : A \longrightarrow f(A)$ definirana z $f'(x) = f(x)$ za vsak $x \in A$. Očitno je f' surjekcija. Potem je funkcija $f' \circ g : \mathbb{N} \longrightarrow f(A)$ surjekitvna in od tod sledi, da je $f(A)$ števna.
   Drugi način dokaza: Ker je f funkcija, je očitno, da je $|f(A)| \leq |A|$ in ker je A števna, velja tudi $|A| \leq \aleph_0$. Od tod sledi $|f(A)| \leq \aleph_0$ in zato je $f(A)$ števna.

   b) Trditev ne velja. Protiprimer je funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \{1\}$, definirana s predpisom $f(x) = 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Očitno je $\{1\}$ števna množica, $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R}$ pa neštevna.

2. **[25]** Relacija $\sim$ na $\mathbb{R}^2$ je definirana s formulo

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1^2 + y_1 = x_2^2 + y_2.$$

   a) Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in skiciraj ekvivalenčni razred točke $(0, 1)$.

   b) Določi moč množice $\mathbb{R}^2/_\sim$ in svoj odgovor utemelji.

   Rešitev:

   a) Za dokaz, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija, preverimo refleksivnost, simetričnost in tranzitivnost. Ekvivalenčni razred točke $(0, 1)$:

$$[(0,1)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y = 0^2 + 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 1 - x^2\}.$$

   Ekvivalenčni razred je parabola, obrnjena navzdol, s temenom v točki $(0, 1)$.

   b) Moč množice $\mathbb{R}^2/_\sim$ je c. To vidimo tako, da konstruiramo bijekcijo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2/_\sim$ s predpisom $f(y) = [(0, y)]$. Zlahka preverimo, da je f injektivna. Za dokaz surjektivnosti naj bo $[x, y]$ poljuben ekvivalenčni razred. Potem je $f(x^2 + y) = [(0, x^2 + y)] = [(x, y)]$. Od tod sledi, da je f bijekcija.

3. **[25]** Naj bo A množica vseh podmnožic od $\mathbb{R}$, ki vsebujejo množico $\mathbb{N}$ ter B množica vseh zaporedij kompleksnih števil. Določi moči množic A in B (pri tem odgovora utemelji) ter ju primerjaj po velikosti.

   Rešitev: Očitno je $|A| \leq 2^c$. Za dokaz obratne neenakosti pa konstruiramo injektivno funkcijo $f : \mathcal{P}((0,1)) \longrightarrow A$ s predpisom $f(X) = X \cup \mathbb{N}$ za vsak $X \subseteq (0,1)$. Zlahka preverimo, da je f injektivna in zato sledi, da je $|A| \geq |\mathcal{P}((0,1))| = 2^c$. Torej $A = 2^c$.

   Ker je $B = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, je $|B| = |\mathbb{C}|^{|\mathbb{N}|} = c^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$.

   Torej je $|B| < |A|$.

4. **[25]** Čim bolj poenostavi in po velikosti primerjaj naslednja ordinalna števila

$$(3w+2)w(w2+1), (4w+1)(w^2 2+2), w(5w+3)(w+1).$$

   Rešitev:

$$\alpha = (3w+2)w(w2+1) = (w+2)w(w2+1) = (w+2)(w^2 2+w) =$$

$$= ((w+2)w)w2 + (w+2)w = w^2 w2 + w^2 = w^3 2 + w^2.$$

$$\beta = (4w+1)(w^2 2+2) = (w+1)w^2 2 + (w+1)2 =$$
$$= ((w+1)w)w2 + (w+1) + (w+1) = w^2 w2 + w + w + 1 = w^3 2 + w2 + 1.$$

$$\gamma = w(5w+3)(w+1) = w(w+3)(w+1) = w((w+3)w+w+3) = w(w^2+w+3) = w^3+w^2+w3.$$

   Očitno velja
$$\alpha > \beta > \gamma.$$

   Opomba: nekatere vmesne korake (izračun $(w+2)w, (w+1)w, (w+3)w$) je potrebno dodatno utemeljiti (na primer z ustrezno sliko).