

# ELEMENTARNE FUNKCIJE

## Vaje - 11. sklop: Trigonometrične funkcije

---

### Formule

1. Osnovne zveze:

$$(i) \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$(ii) \tan x = \frac{1}{\cot x}$$

$$(iii) 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(iv) 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2. Formule za komplementarne kote:

$$(i) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$(ii) \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x, \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$$

3. Adicijski izreki:

$$(i) \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$(ii) \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$(iii) \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$$

4. Formule za računanje dvojnih kotov:

$$(i) \sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$(ii) \tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

5. Formule za računanje polovičnih kotov:

$$(i) \sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$(ii) \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$(iii) \tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

6. Formule za pretvarjanje produkta v vsoto:

$$(i) \sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x + y) - \cos(x - y))$$

$$(ii) \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y))$$

$$(iii) \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y))$$

7. Formule za pretvarjanje vsote v produkt:

$$(i) \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$(ii) \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$(iii) \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$(iv) \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

## Naloge na vajah

1. Dokaži, da je  $(\sin x)' = \cos x$ .
2. Dana je funkcija s predpisom  $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ .
  - (a) Za katere vrednosti spremenljivke  $x$  na intervalu  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  velja neenakost  $f(x) < 0$ .
  - (b) Pokaži, da je funkcija  $f$  periodična in skiciraj njen graf.
3. Poišči osnovno periodo funkcije  $f(x) = 2 \sin(3x) - 1$ .
4. Dana je funkcija s predpisom  $f(x) = \cos x - \sin x$ .
  - (a) Zapis predpisa funkcije  $f$  preoblikuj tako, da bo v njem le funkcija sinus.
  - (b) Zapiši ničle funkcije  $f$  in točke, v katerih funkcija  $f$  doseže najmanjšo oziroma največjo vrednost ter nariši njen graf na intervalu  $[-2\pi, 2\pi]$ .
5. Ali je funkcija  $f$ , podana s predpisom  $f(x) = |\tan(x - \frac{\pi}{2})|$ , periodična? Če je, kakšna je njena osnovna perioda?
6. Dan je izraz  $A = \cos^2 x - \sin^2 x + \sin(2x)$ .
  - (a) Pretvori izraz  $A$  v produkt.
  - (b) Za katere vrednosti parametra  $m$  ima enačba  $A = m$  realne rešitve?
  - (c) Reši enačbo  $A = \sqrt{2}$ .
7. Reši enačbe:
  - (a)  $3 \cos^2 x - \sin x \cos x = 2$
  - (b)  $\cos x = 3 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$
  - (c)  $\sin^2 x = 2(\sin x \cos x + 1)$
  - (d)  $\sin x + 2 \cos x = 1$
  - (e)  $\cos x + \cos(7x) + \cos(4x) = 0$
8. Reši neenačbi:
  - (a)  $2 \cos(x - \frac{\pi}{4}) < 0$
  - (b)  $\frac{5}{4} \sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^2(2x) > \cos(2x)$
9. Izrazi funkcijo  $\arctan x$  s funkcijo  $\arcsin x$ .
10. Naj bo  $f(x) = \cos(\arcsin x)$ . Izrazi funkcijo  $f$  brez krožnih in trigonometričnih funkcij.
11. Skiciraj grafa funkcij:
  - (a)  $f(x) = \sin(\arcsin x)$
  - (b)  $g(x) = \arcsin(\sin x)$
12. Reši enačbo
$$\arcsin x + \arccos(2x) = \frac{\pi}{6}.$$

## Domače naloge

1. Reši enačbe:

a)  $3 \sin x - \sin^2 x = \cos(2x) + 3.$

b)  $\sin x \cdot \sin(3x) = \sin(5x) \cdot \sin(7x).$

c)  $\arccos(\cos(-\frac{5\pi}{4})) = x.$

(d)  $\sin^2 \frac{x}{2} - \cos x - \frac{1}{2} \sin x = 0$

2. Dokaži, da za vsako realno število  $x \in (-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  velja enakost

$$\frac{2}{1 - \sin x} = \tan^2 \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + 1.$$

3. Reši enačbo

$$\sin x + 2 \cos x + 2 = 0.$$

4. Funkcija  $f$  je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{2 \sin x + \tan x}{\sin x}.$$

a) Določi definicijsko območje funkcije  $f$  in izračunaj njene ničle.

b) Ugotovi, ali je  $f$  liha oz. soda.

c) Ugotovi, ali funkcija  $f$  v točki z absciso  $x = \frac{\pi}{4}$  pada oz. narašča.

5. Reši enačbe oz. neenačbe:

(a)  $\frac{1}{2} \cos x - \sin^2 x \cos x = 0,$

(b)  $2 \cos^2 x + \sin(2x) = 2,$

(c)  $\sin(2x) - \cos(\frac{x}{2}) = 0.$

6. Nariši grafa funkcij:

(a)  $f(x) = \tan(\arctan(x)),$

(b)  $g(x) = \arctan(\tan(x)).$