

# ELEMENTARNE FUNKCIJE

## Vaje - 2. sklop: Funkcije

---

### Naloge na vajah

1. Naj bo  $f$  funkcija, ki vsakemu človeku priredi njegov mesec rojstva. Za funkcijo  $f$  zapiši definicijsko območje, zalogo vrednosti ter preveri, ali je injektivna oziroma surjektivna.
2. Naj bo  $f$  funkcija, ki vsakemu državljanu priredi njegov EMŠO. Za funkcijo  $f$  zapiši definicijsko območje, zalogo vrednosti ter preveri, ali je injektivna oziroma surjektivna.
3. Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je podana s predpisom  $f(x) = x^2$ . Ali je  $f$  injektivna oziroma surjektivna? Če ni, ustrezno spremeni domeno in kodomeno, da bo bijektivna.
4. Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je podana s predpisom  $f(x) = \cos x$ . Ali je  $f$  injektivna oziroma surjektivna? Če ni, ustrezno spremeni domeno in kodomeno, da bo bijektivna.
5. Naj bo  $A = [1, 3]$  in  $B = [2, 5]$ . Poišči vsaj eno bijekcijo  $f : A \rightarrow B$  in dokaži, da je res bijekcija.
6. Naj bo  $A = (0, 1)$  in  $B = \mathbb{R}$ . Poišči vsaj tri različne bijekcije  $f : A \rightarrow B$ .
7. Določi podmnožici realnih števil  $A$  in  $B$  tako, da bo funkcija  $f : A \rightarrow B$ , podana s predpisom  $f(x) = \frac{x-1}{3-x}$ , bijektivna. Zapiši tudi predpis inverzne funkcije  $f^{-1}$ .
8. Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  naj bo podana s predpisom  $f(x) = -x^2 + 1$ . Določi  $f([0, \infty))$ ,  $f^{-1}((1, 3])$  in  $f^{-1}((-2, -1))$ .
9. Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  naj bo podana s predpisom  $f(x) = \cos x$ . Določi  $f^{-1}([\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}])$ .
10. Naj bo  $A = (0, 1) \times \mathbb{Z}$ . Funkcija  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  naj bo podana s predpisom  $f(x, k) = x + k$ .
  - (a) Določi  $f(A)$ ,  $f^{-1}(\{0\})$ ,  $f^{-1}(\mathbb{Z})$  in  $f^{-1}((\frac{1}{2}, \frac{3}{2}))$ .
  - (b) Dokaži, da je  $f$  injektivna.

11. Funkcija  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ je sod} \\ 3n + 1, & n \text{ je lih.} \end{cases}$$

Ali je funkcija  $f$  injektivna oziroma surjektivna?

12. Naj bo funkcija  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x^2; & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \sqrt{2}x; & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ugotovi, ali je  $f$  injektivna oziroma surjektivna.

13. Podana je funkcija  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$  s predpisom  $f(a) = \sqrt{(a-1)^2}$ .

- (a) Skiciraj graf funkcije  $f$ .

- (b) Ugotovi, ali je funkcija  $f$  injektivna ali surjektivna.  
 (c) Če  $f$  ni bijektivna, ustrezno spremeni domeno, da bo.

14. Naj bo  $A = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ funkcija}\}$ . Podana je preslikava

$$F : A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F : f \mapsto f(0).$$

- (a) Ugotovi, ali je  $F$  injektivna oz. surjektivna. Svoje trditve dokaži ali s protiprimerom ovrži.  
 (b) Ali je funkcija  $F$ , zožena na množico  $B = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = 2x + b, b \in \mathbb{R}\}$  injektivna oz. surjektivna? Odgovor utemelji.
15. Naj bo  $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  funkcija s predpisom  $F(n, m) = n - m$ .
- (a) Ugotovi, ali je  $F$  injektivna oz. surjektivna.  
 (b) Določi množico  $F^{-1}(\{-2, 2\})$  in jo skiciraj v  $\mathbb{R}^2$ .

16. Naj bosta  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  podani s predpisoma  $f(x) = 2^x$  in  $g(x) = x - 1$ . Določi predpisa funkcij  $f \circ g$  in  $g \circ f$ . Ali sta ti dve funkciji bijektivni? Če sta, to tudi dokaži.

17. Podani sta funkciji  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} \text{ in } g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \geq \frac{\pi}{2} \\ |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Zapiši predpisa funkcij  $f \circ g$  in  $g \circ f$  ter nariši grafe vseh štirih funkcij.

18. Podani sta funkciji  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 0 \\ 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \text{ in } g(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 0 \\ 3 - 2x, & 0 < x < 1 \\ 3x, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Zapiši predpisa funkcij  $f \circ g$  in  $g \circ f$ .

19. Naj bosta  $f : A \rightarrow B$  in  $g : B \rightarrow C$  funkciji. Dokaži: če sta funkciji  $f$  in  $g$  injektivni, potem je  $g \circ f$  injektivna.
20. Naj bosta  $f : A \rightarrow B$  in  $g : B \rightarrow C$  funkciji. Dokaži: če je funkcija  $g \circ f$  injektivna in  $f$  surjektivna, potem je  $g$  injektivna.

## Domača naloga

- Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je podana s predpisom  $f(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 - 2x^2$ . Ali je  $f$  injektivna oziroma surjektivna? Če ni, ustrezno spremeni domeno in kodomeno, da bo bijektivna.
- Naj bo  $f$  predpis, ki vsakemu naravnemu številu priredi njemu najbližje praštevilo. Je tako podana preslikava  $f$  dobro definirana? V čem je težava takšne "definicije"?
- Naj bosta  $f : A \rightarrow B$  in  $g : B \rightarrow C$  funkciji. Dokaži: če sta funkciji  $f$  in  $g$  surjektivni, potem je  $g \circ f$  surjektivna.
- Naj bosta  $f : B \rightarrow C$  in  $g : A \rightarrow B$  funkciji ter naj bo  $f \circ g : A \rightarrow C$  njun kompozitum.

- (a) Dokaži: če je funkcija  $f \circ g$  surjektivna, potem je  $f$  surjektivna.
- (b) Naj velja  $A = B = C = \mathbb{R}$ . Poišči taki funkciji  $f$  in  $g$ , da bo  $f$  surjektivna,  $f \circ g$  pa ne.
5. Naj bo funkcija  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  podana s predpisom  $f(x) = \log x$ .
- (a) Določi  $f^{-1}(\mathbb{Q})$  in  $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ .
- (b) Ugotovi, ali je  $f(3)$  racionalno ali iracionalno število.
6. Podana je preslikava

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$$

$$F : (x, y) \mapsto x^2 + y^2.$$

- (a) Ugotovi, ali je  $F$  injektivna oz. surjektivna. Svoje trditve dokaži ali s protiprimerom ovrži.
- (b) Zapiši in skiciraj množici  $F^{-1}(\{4\})$  ter  $F^{-1}([1, 9])$ .
- (c) Ali je funkcija  $F$ , zožena na množico  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \wedge y \geq 0\}$  injektivna oz. surjektivna? Odgovor utemelji.
7. Naj bo  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija s predpisom  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ . Dane so množice  $A = f([3, \infty))$ ,  $B = f^{-1}([-2, 4])$  in  $C = f\left(\left\{\sqrt{\frac{n}{n+1}} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right)$ .
- (a) Zapiši in skiciraj množici  $A$  in  $B$  v  $\mathbb{R}$ .
- (b) Določi infimum, minimum, supremum in maksimum (če obstajajo) množic  $A$ ,  $B$  in  $C$ . Odgovor za infimum množice  $C$  tudi dokaži.
8. Naj bo  $f : [0, 1) \times [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija s predpisom  $f((x, y)) = x + y$ .
- (a) Skiciraj množico  $A = [0, 1) \times [0, 1)$  v ravnini  $\mathbb{R}^2$  in množico  $f(A)$  na realni osi.
- (b) Določi množici  $f^{-1}([2, \infty))$ , in  $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$  in ju skiciraj v  $\mathbb{R}^2$ .
- (c) Določi infimum, minimum, supremum in maksimum (če obstajajo) množic  $A = f\left(\left(0, \frac{1}{2}\right] \times \left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$  in  $B = f\left(\left\{\left(\frac{n}{n+1}, 0\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right)$ .
9. Podani sta funkciji  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & x < -2 \\ -x^2 + 5, & -2 \leq x \leq 1 \\ 4, & x > 1 \end{cases} \text{ in } g(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x \leq 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases}.$$

Zapiši predpis funkcije  $f \circ g$ , nariši njen graf in določi zalogo vrednosti te funkcije.