

ELEMENTARNE FUNKCIJE

Vaje - 6. sklop: Potenčna in korenska funkcija

Naloge na vajah

1. Poenostavi naslednje izraze.

(a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

(b) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{4+\sqrt{14}} \cdot \sqrt{4-\sqrt{14}}$

(c) $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$

(d) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

(e) $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$

2. Kolona vozil je dolga 6 km in pelje s stalno hitrostjo v . Policist na motorju se s hitrostjo $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ pelje od konca do začetka kolone, obrne in se z isto hitrostjo pelje do konca kolone. Za vse skupaj potrebuje 12,5 minute. Koliko je v ?

3. Določi presečišča grafov funkcij $f(x) = \sqrt{20-x^2}$ in $g(x) = x^{-2}$. Nariši tudi ustrezno sliko!

4. V pravokotnem koordinatnem sistemu imamo točko $T(a, 0)$, pri čemer je $a \neq 0$. Iz točke $A(0, 1)$ narišemo pravokotnico na daljico AT . Presečišče te pravokotnice z abscisno osjo je točka $U(z, 0)$. Izračunaj z ter nariši graf funkcije $z(a)$.

5. Reši enačbi.

(a) $(2x+3)^{-4} = 81$

(b) $(x^3-1)^2 = 1$

6. Poenostavi naslednje izraze.

(a) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

(b) $\sqrt[3]{125x^4y^3} : \sqrt[6]{64x^8y^{12}}$

(c) $(0.75)^{0.25}(0.5)^{0.375} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt[8]{18}$

(d) $(x^{\frac{9}{8}}y^{\frac{5}{4}})^{\frac{2}{3}}z^{\frac{5}{6}} : x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{3}{4}}z^{\frac{3}{4}}$

(e) $\sqrt[8]{x^4\sqrt{x-2}} \sqrt[4]{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}$

(f) $\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{ab^3}-\sqrt[4]{a^3b}} + \frac{1+\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right)^2 \sqrt{1+\frac{a}{b}-2\sqrt{\frac{a}{b}}}$

7. Reši enačbo $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} = (\sqrt{2}+1)^2$.

8. Obravnavaj enačbi:

(a) $\sqrt{x-1} = a$

(b) $\sqrt{x+2} = \sqrt{a-x}$

9. Ugotovi, za katere $a \in \mathbb{R}$ velja

$$\sqrt{a + \sqrt{a^2 - 1}} - \sqrt{a - \sqrt{a^2 - 1}} = \sqrt{2}\sqrt{a - 1}.$$

10. Dana je funkcija s predpisom $f(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt{x}$.

- Zapiši naravno definicijsko območje funkcije f .
- Dokaži, da je f naraščajoča.
- Določi najmanjšo vrednost funkcije f .
- Koliko rešitev ima enačba $f(x) = 3$?

11. Dana je funkcija s predpisom $f(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$.

- Zapiši naravno definicijsko območje funkcije f .
- Dokaži, da je f padajoča.
- Določi največjo vrednost funkcije f .

12. Določi vsa realna števila a , za katera je enačba

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = a$$

rešljiva. Za take a poišči tudi rešitev.

13. Navedi in dokaži binomski izrek!

Domače naloge

1. Reši enačbi.

- $(2x - 1)^{-3} = 8$
- $(x^2 - 5)^2 = 1$

2. Določi naravno definicijsko območje funkcije $f(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}$.

3. Določi naravno definicijsko območje funkcije $f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}$.

4. Reši enačbo $\sqrt{x + 1} - \sqrt{x} = (\sqrt{2} - 1)^4$.

5. Poenostavi izraz

$$\left(\sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}} \sqrt{3 - \sqrt{5}} \right)^{-2}$$

do oblike $\frac{a}{b}$, kjer sta $a, b \in \mathbb{N}$.

6. Določi taki celi števili a in b , da bo število $\sqrt{2016 + 2\sqrt{2015}}$ rešitev kvadratne enačbe

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Dokaži, da pri tako določenih a in b število $\sqrt{2016 - 2\sqrt{2015}}$ ni rešitev dane enačbe.

7. Naj bo a pozitivno realno število. Katere število je večje,

$$\sqrt{a + 2007} - \sqrt{a + 1004} \quad \text{ali} \quad \sqrt{a + 1003} - \sqrt{a}?$$

Odgovor utemelji!

8. Naj bosta a in b pozitivni realni števili. Dokaži, da je vrednost izraza

$$\frac{\sqrt{\frac{ab}{8}} + \sqrt{2}}{\sqrt{\frac{ab+16}{8}} + \sqrt{ab}}$$

neodvisna od a in b .

9. Poišči vsa realna števila x , za katera je

$$\sqrt{8-x} + \sqrt{8+x}$$

celo število.