

Pisni izpit pri predmetu **KOMBINATORIKA IN VERJETNOST**

17. junij 2013

1. [25] Na voljo imamo številke 1, 2, 3, 4 in 5. Iz njih sestavljamo števila dolžine 20. Koliko takih števil vsebuje:
- (a) natanko eno 1, dve 2, tri 3 in štiri 4?
 - (b) vseh pet števk?
 - (c) natanko sedem enk?
 - (d) natanko sedem enk, od katerih nobeni dve nista zaporedni?

2. [25] Koliko je vseh besed dolžine n , ki jih sestavljamo iz črk a, b in c , in ki ne vsebujejo dveh zaporednih a -jev?

3. [25] Z intervala $[-1, 1]$ naključno izberemo 3 števila. Označimo naslednje dogodke:

A: Vsota absolutnih vrednosti izbranih števil je manjša od 1.

B: Vsota kvadratov izbranih števil je manjša od 1.

C: Vsota kvadratov prvih dveh števil je manjša od 1.

Izračunaj verjetnosti dogodkov $A, B, C, A|B, A|\bar{B}$ in $B|C$.

4. [25] Porazdelitvena funkcija zvezne naključne spremenljivke X je podana s predpisom

$$F_X(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 1, \\ k(x-1)^2; & 1 < x < 3, \\ 1; & x \geq 3. \end{cases}$$

- (a) Določi konstanto k tako, da bo $F_X(x)$ res zvezna naključna spremenljivka.
- (b) Izračunaj gostoto verjetnosti naključne spremenljivke X . Kolikšna je verjetnost, da X zavzame vrednosti med 1 in 2?

Čas reševanja je **120 minut**. Vsak odgovor natančno utemelji.

Izpit pri predmetu **KOMBINATORIKA IN VERJETNOST**

4. julij 2013

1. [25] Na prireditvi se za govorniškimi odrom razvrsti n žensk ($n \geq 3$) in m moških ($m \geq 2$). Na koliko načinov se lahko razvrstijo, če
 - (a) morajo govorniki istega spola nastopati eden za drugim?
 - (b) Ana, Brina in Cvetka ne smejo imeti govora ena za drugo, enako pa velja tudi za Andreja in Bojana?

2. [25] Poišči splošno rešitev homogene rekurzivne zveze

$$a_n - a_{n-2} = 2(a_{n-1} - a_{n-3}),$$

ob začetnih pogojih $a_i = i$ za $i \in \{0, 1, 2\}$.

3. [25] V žepu imamo 3 kovanice. Dva sta poštena, grb in cifra padeta z verjetnostjo $\frac{1}{2}$, tretji pa ima na obeh straneh grb. Iz žepa naključno potegnemo kovanec in ga vržemo. Dobimo grb. Kakšna je verjetnost, da ima ta kovanec tudi na spodnji strani grb?
4. [25] Na stranici AB kvadrata $ABCD$ s stranico dolžine a naključno izberemo točko T . Naj naključna spremenljivka X meri dolžino daljice TC .
 - (a) Določi zalogo vrednosti spremenljivke X .
 - (b) Zapiši porazdelitveno funkcijo in gostoto porazdelitve naključne spremenljivke X .
 - (c) Kolikšna je verjetnost, da bo dolžina omenjene daljice vsaj $\frac{4}{3}a$?

Čas reševanja je **120 minut**. Vsak odgovor natančno utemelji.

Izpit pri predmetu **KOMBINATORIKA IN VERJETNOST**

26. avgust 2013

- [25] Eva in Jaka si lahko razdelita jabolka, hruške in banane na 105 načinov. Med sadeži iste vrste ne ločimo.
 - Koliko sadežev posamezne vrste imata na voljo če vemo, da je največ jabolk in najmanj banan?
 - Na koliko načinov lahko sadeže razporedimo v tri različne košare tako, da nobena ne bo prazna?

Če nisi znal rešiti primera a), nalogo pod b) rešuj za primer ko je jabolk 10, hrušk 8 in banan 6.
- [25] Iz števk števila 203342838 želimo sestaviti nova prava devetmestna števila.
 - Koliko je vseh takih števil?
 - Koliko takih števil je deljivih s 6?
 - Koliko je pa različnih pravih petmestnih števil, ki jih lahko sestavimo iz različnih števk zgornjega števila?
- [25] Marko in Matej streljata na tarčo. Marko jo zadene z verjetnostjo $\frac{2}{3}$, Matej pa z verjetnostjo $\frac{5}{7}$. Vsak od njiju po dvakrat zaporedoma ustrelji proti tarči.
 - Kolikšna je verjetnost, da je tarča zadeta natanko dvakrat?
 - Tarča je zadeta natanko dvakrat. Kolikšna je verjetnost, da jo je obakrat zadel Marko?
- [25] V pravilnem $2n$ -kotniku z označenimi oglišči je stranica dolga a enot. Naključno izberemo različni oglišči $2n$ -kotnika. Naključna spremenljivka X naj meri najkrajšo razdaljo med ogliščema po obodu $2n$ -kotnika.
 - Zapiši zalogo vrednosti naključne spremenljivke X .
 - Zapiši verjetnostno funkcijo naključne spremenljivke X in preveri, da je to res verjetnostna funkcija.
 - Izračunaj matematično upanje naključne spremenljivke X .

Če naloge ne znaš rešiti v splošnem, jo reši v primeru, ko imamo opravka z 8-kotnikom. Pravilna rešitev naloge v tem posebnem primeru prinaša 10 točk.

Čas reševanja je **120 minut**. Vsak odgovor natančno utemelji.

Izpit pri predmetu **KOMBINATORIKA IN VERJETNOST**

6. september 2013

1. [30] Na železniški postaji $n \geq 10$ ljudi vstopi na do tedaj prazen vlak z desetimi vagoni. Na koliko načinov se lahko ljudje na vlak posedejo tako, da
 - (a) bo v prvem vagonu sedelo natanko pet ljudi?
 - (b) bosta Ana in Andrej sedela v istem vagonu, prav tako Brina in Bojan, vendar ne bodo vsi štirje sedeli v istem vagonu?
 - (c) noben vagon ne bo ostal prazen?

Če naloge ne znaš rešiti v splošnem, jo reši v primeru, ko je $n = 15$. Pravilna rešitev naloge v tem posebnem primeru prinaša 15 točk.

2. [20] V razvoju multinoma $(1 + 2\sqrt{x} + x^2)^n$ je koeficient pred x enak 144. Kolikšen je n ?
3. [25] Na daljici dolžine 12 cm naključno in neodvisno izberemo dve točki. Označimo dogodka:
 - A: točki sta od razpolovišča daljice oddaljeni vsaj 2 cm;
 - B: razdalja med točkama je vsaj 6 cm.

Izračunaj verjetnosti dogodkov A , B , AB ter $A|B$.

4. [25] V treh oštevilčenih posodah so kroglice razvrščene takole:

1. posoda	2. posoda	3. posoda
5 rdečih	3 rdeče	
3 modre	3 modre	4 modre
4 zelene	4 zelene	3 zelene

- (a) Naključno izberemo posodo in iz nje izvlečemo dve kroglici. Kolikšna je verjetnost, da sta kroglici enake barve?
- (b) Naključno izberemo posodo in iz nje izvlečemo dve kroglici. Opazimo, da sta kroglici enake barve. Kolikšna je verjetnost, da smo ju izvlekli iz 2. posode?

Navodila:

- *Pozorno preberi vsako vprašanje in vsak odgovor skrbno utemelji. Odgovori brez utemeljitve ne bodo točkovani.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator, matematični priročnik in en ročno zapisan list s formulami.*
- *Čas reševanja je **120 minut**.*

Pisni izpit pri predmetu **KOMBINATORIKA IN VERJETNOST**

24. september 2013

- [25] V pritličju 10-nadstropne stolpnice stopijo v dvigalo štirje ljudje. Na koliko načinov lahko izstopijo, če
 - nobena dva ne smeta izstopiti v istem nadstropju?
 - izstopajo v parih?
 - eden sam izstopi v 3. nadstropju in izstopijo v natanko treh nadstropjih?
- [25] 15 prijateljev si želi opraviti voziški izpit. V mestu so na voljo 3 različne avtošole. Na koliko načinov se lahko prijatelji vpišejo v avtošole, če
 - naj se v vsako izmed njih vpiše vsaj eden izmed prijateljev?
 - naj vsaj ena izmed avtošol ostane brez teh kandidatov?
- [25] Najpej vržemo pošteno igralno kocko, nato pa nepošten kovanec (verjetnost, da pade grb, je $\frac{1}{3}$) tolikokrat, kolikor pik je padlo na kocki. Izračunaj verjetnost, da dobimo enako število grbov kot cifer.
- [25] Porazdelitvena funkcija zvezne naključne spremenljivke X je podana s predpisom
$$F_X(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 1, \\ k(x-1)^2; & 1 < x < 3, \\ 1; & x \geq 3. \end{cases}$$
 - Določi konstanto k tako, da bo $F_X(x)$ res zvezna naključna spremenljivka.
 - Izračunaj gostoto verjetnosti naključne spremenljivke X .
 - Kolikšna je verjetnost, da X zavzame vrednosti med 1 in 2?

Navodila:

- Pozorno preberi vsako vprašanje in vsak odgovor skrbno utemelji. Odgovori brez utemeljitve ne bodo točkovani.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator, matematični priročnik in en ročno zapisan list s formulami.
- Čas reševanja je **120 minut**.