

Pisni izpit pri predmetu **KOMBINATORIKA IN VERJETNOST**

31. januar 2014

1. [25] V kino dvorano z 10 vrstami po 10 oštevilčenih sedežev vstopi 100 ljudi. Od tega je 40 deklet in 60 fantov. Na koliko načinov se lahko posedejo,
- (a) če ni nobenih omejitev?
  - (b) če Ana in Luka ne smeta sedeti skupaj (v isti vrsti, na zaporednih sedežih)?
  - (c) če lahko v isti vrsti sedijo le predstavniki istega spola?

2. [25] Za dolgo pravokotno mizo, ki ima na vsaki strani  $n$  oštevilčenih stolov, zajtrkuje  $2n$  oseb. Na eni strani mize so stoli črni in oštevilčeni s števkami od 1 do  $n$ , na nasprotni pa beli in s števkami od  $n + 1$  do  $2n$ . Na koliko načinov se lahko isti ljudje posedejo k večerji tako, da nihče, ki je zajtrkoval na črnem stolu, ne bo sedel niti na istem niti na nasprotmen stolu kot pri zajtrku?

3. [25] Iz intervala  $[0, 1]$  naključno in neodvisno izberemo dve števili. Poglejmo naslednja dogodka:
- A:** Vsota izbranih števil je manjša od treh četrtin.
  - B:** Obe izbrani števili sta bodisi manjši od ene polovice bodisi večji od ene polovice.

Izračunaj verjetnosti dogodkov A, B ter  $A|B$ .

4. [25] Zvezna naključna spremenljivka  $X$  je podana s predpisom za gostoto verjetnosti:

$$p(x) = \begin{cases} a(-x^2 + 2x); & x \in [0, 2] \\ a(-x^2 - 2x); & x \in [-2, 0] \\ 0; & \text{sicer.} \end{cases}$$

- (a) Določi konstanto  $a$ .
- (b) Izračunaj matematično upanje in disperzijo naključne spremenljivke  $X$ .

---

**Navodila:**

- *Pozorno preberi vsako vprašanje in vsak odgovor skrbno utemelji. Odgovori brez utemeljitve ne bodo točkovani.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator, matematični priročnik in en ročno zapisan list s formulami.*
- *Čas reševanja je 120 minut.*

## Pisni izpit pri predmetu **KOMBINATORIKA IN VERJETNOST**

24. junij 2014

- [25] V skupini je 8 študentk in 7 študentov. Med njimi so tudi Anastazija, Betka in Cecilija.
  - Na koliko načinov se lahko razporedijo v vrsto, če naj bo Betka pred Anastazijo in Cecilijo?
  - Na koliko načinov se lahko razporedijo v 3 skupine, če naj bosta v vsaki skupini vsaj dva človeka?
  - Na zabavo vsak pripelje še svojega partnerja. Na koliko načinov se lahko razporedijo v plesne pare? (Plesni par predstavljata moški in ženska.)

- [25] Poišči splošno rešitev nehomogene rekurzivne zveze

$$a_n = 4a_{n-1} + 4a_{n-2} + 4^n$$

pri začetnih pogojih  $a_0 = 1$  in  $a_1 = 2$ .

- [25] V posodi imamo 5 belih in 4 črne kroglice, v drugi pa dve beli in eno črno. Najprej naenkrat na slepo premestimo tri kroglice iz prve posode v drugo, nato pa iz druge posode naenkrat potegnemo dve kroglici. Obe sta beli. Kolikšna je verjetnost, da so bile vse tri premeščene kroglice črne?
- [25] Na kvadratu  $[0, 1] \times [0, 1]$  naključno izberemo eno točko. Naj naključna spremenljivka  $X$  meri oddaljenost točke do najbližje stranice kvadrata.
  - Zapiši ter skiciraj gostoto porazdelitve ter porazdelitveno funkcijo naključne spremenljivke  $X$ .
  - Izračunaj matematično upanje naključne spremenljivke  $X$ .

---

### Navodila:

- Pozorno preberi vsako vprašanje in vsak odgovor skrbno utemelji. Odgovori brez utemeljitve ne bodo točkovani.*
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator, matematični priročnik in en ročno zapisan list s formulami.*
- Čas reševanja je **120 minut**.*

## Pisni izpit pri predmetu **KOMBINATORIKA IN VERJETNOST**

8. julij 2014

- [15] Na voljo imamo črke besed DO RE MI FA SO LA TI DO.
  - Koliko različnih besed lahko tvorimo iz zgornjih črk?
  - Koliko različnih besed lahko tvorimo iz zgornjih črk, če naj črki A in I vedno stojita skupaj?
- [10] Poišči koeficient pred členom  $x^{18}y^{20}$  v razvoju multinoma  $(1 - 2x^2y^3 - x^5y^4)^{26}$ .
- [25] Sestavljamo stolp iz  $n$  raznobarnih kock. Ko stolp sestavimo, kocke od spodaj navzgor oštevilčimo s števkami od 1 dalje. Nato stolp razdremo in ga ponovno sestavimo. Koliko je takih novih sestav stolpa, pri katerih nobena kocka, če bi jih oštevilčili podobno kot prej, ne bi dobila iste številke kot prej?
- [25] Iz intervala  $[-2, 2]$  naključno izberemo dve števili. Označimo naslednje dogodke:
  - Vsota absolutnih vrednosti izbranih števil je večja od 2.
  - Absolutna vrednost vsote izbranih števil je manjša od 2.
  - Produkt izbranih števil je manjši od 2.Izračunaj verjetnosti dogodkov  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $A|B$  in  $B|C$ .
- [25] V prvi posodi imamo 2 beli in 3 črne kroglice, v drugi pa 2 beli in 1 črno. Iz prve posode naključno prenesemo 2 kroglici v drugo posodo, nato pa iz druge posode nazaj na slepo prenesemo 2 kroglici v prvo posodo. Naj naključna spremenljivka  $X$  meri število belih kroglic v prvi posodi.
  - Zapiši porazdelitev naključne spremenljivke  $X$ .
  - Kolikšno je pričakovano število belih kroglic v prvi posodi?

---

### Navodila:

- Pozorno preberi vsako vprašanje in vsak odgovor skrbno utemelji. Odgovori brez utemeljitve ne bodo točkovani.*
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator, matematični priročnik in en ročno zapisan list s formulami.*
- Čas reševanja je **120 minut**.*

Pisni izpit pri predmetu **KOMBINATORIKA IN VERJETNOST**

27. avgust 2014

1. [25] Sošolci obujajo spomine na šolske dni in ob pregledu slik s šolskega fotografiranja jih obide misel, da bi slikanje ponovili. Na koliko načinov se lahko postavijo za slikanje tako, da nobeden ne bo stal na istem mestu kot na slikanju v šolskih časih? Na fotografiji so stali v treh vrstah, v vsaki vrsti 9 učencev.

2. [25] Poišči tisto rešitev rekurzivne zveze

$$a_{n+2} - 4a_n = 2 - 8n + 3^n$$

za katero velja  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 5$ .

3. [25] Na voljo imamo tri igralne kocke. Prva je poštena, na drugi je na ploskvi, kjer naj bi bili dve piki, le ena, na tretji pa imamo tri enke, na preostalih ploskvah pa je na eni 4, na drugi 5 in na preostali 6 pik. Naključno izberemo eno izmed kock in jo vržemo petkrat. Kolikšna je verjetnost, da smo metali drugo kocko če vemo, da je pri tem trikrat padla enica?
4. [25] Zvezna naključna spremenljivka  $X$  je podana s porazdelitveno funkcijo:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 1 \\ a \ln x; & 1 < x < e \\ 1; & \text{sicer.} \end{cases}$$

- (a) Zapiši gostoto porazdelitve  $p(x)$  ter izračunaj konstanto  $a$ .  
(b) Izračunaj verjetnosti dogodkov  $x < 2$  in  $x > 3$ .  
(c) Izračunaj še matematično upanje in disperzijo naključne spremenljivke  $X$ .

---

**Navodila:**

- *Pozorno preberi vsako vprašanje in vsak odgovor skrbno utemelji. Odgovori brez utemeljitve ne bodo točkovani.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator, matematični priročnik in en ročno zapisan list s formulami.*
- *Čas reševanja je 120 minut.*

## Pisni izpit pri predmetu **KOMBINATORIKA IN VERJETNOST**

5. september 2014

- [25] Na zabavo pride 10 fantov in 15 deklet.
  - Na koliko načinov se lahko posedejo za dolgo ravno mizo s po 15 sedeži na vsaki strani?
  - Na koliko načinov se lahko posedejo za 5 enako velikih okroglih miz?
  - Na koliko načinov lahko tvorijo 5 plesnih parov?

- [25] Poišči splošno rešitev homogene rekurzivne zveze

$$a_n - a_{n-2} = 2(a_{n-1} - a_{n-3}),$$

ob začetnih pogojih  $a_i = i$  za  $i \in \{0, 1, 2\}$ .

- [25] Na voljo imamo tri posode, v katerih so bele in rdeče kroglice razporejene takole: v 1. posodi so 3 bele in 2 rdeči, v 2. posodi 2 beli in tri rdeče, v tretji pa 1 bela in 2 rdeči. Sežemo v prvo posodo in naključno izberemo eno kroglico, ki jo prestavimo v drugo posodo. Podobno še iz druge v tretjo posodo prestavimo eno kroglico. Nato sežemo v tretjo posodo in naenkrat izvlečemo 2 kroglici. Opazimo, da sta obe rdeči. Kolikšna je potem verjetnost, da sta bili obe preneseni kroglici rdeči?
- [25] Porazdelitvena funkcija naključne spremenljivke  $X$  je podana s predpisom

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{ax}{x+1}; & x \geq 0, \\ 0; & x < 0. \end{cases}$$

- Določi konstanto  $a$  tako, da bo  $F_X$  res porazdelitvena funkcija in izračunaj gostoto porazdelitve naključne spremenljivke  $X$ . Gostoto porazdelitve in porazdelitveno funkcijo tudi skiciraj.
- Kakšna je verjetnost, da naključna spremenljivka  $X$  zavzame vrednosti, ki so večje od 1?

---

### Navodila:

- Pozorno preberi vsako vprašanje in vsak odgovor skrbno utemelji. Odgovori brez utemeljitve ne bodo točkovani.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator, matematični priročnik in en ročno zapisan list s formulami.
- Čas reševanja je **120 minut**.