Dirichletov princip in pravilo štetja parov

seminarska naloga pri predmetu Kombinatorika

Tadeja Pucko, Jožica Bezovnik

maj, 2003

Nekateri matematični principi, med njimi tudi omenjena v naslovu, so sami po sebi tako razumljivi, da bi pričakovali takšne tudi rezultate. Da pa to ni nujno res, so v nadaljevanju prikazani primeri, ki jih je Paul Erdos zajel v knjigi *The Book*. Na podobne primere pa bomo naleteli tudi v prihodnjih poglavjih.

Kot že vemo, se **Dirichletov princip** oziroma **načelo golobnjaka** glasi takole:

"Če n predmetov razporedimo v r škatel, kjer je $n > r$, potem sta v vsaj eni škatli vsaj dva predmeta."

Dokaz je nepotreben, lahko pa ga na hitro povemo s protislovjem. Predpostavimo, da je v vsaki izmed r škatel največ en predmet, zato bi moralo biti r tudi predmetov, mi jih pa imamo $n > r$ in tako pridemo do protislovja. $\square$

Pa povejmo ta princip bolj natančno, v matematičnem jeziku:

TRDITEV. *Naj bosta N in R dve končni množici, $|N| = n$, $|R| = r$ in $n > r$. Naj bo $f : N \to R$ neka preslikava. Potem obstaja tak $a \in R$, da velja:*

$$|f^{-1}a| \geq 2$$

Drugače povedano: *f ni injektivna preslikava, se pravi da obstajata taka $b, c \in N$, da je $f(b) = f(c)$. Lahko postavimo celo močnejšo neenakost:*

$$|f^{-1}a| \geq \frac{n}{r}$$

Dokaz. Če to ne bi bilo res, bi veljalo $|f^{-1}a|\frac{n}{r}$ za vsak $a \in R$ in bi dobili $n = \sum_{a \in R} |f^{-1}a| < r * \frac{n}{r} = n$. Pridemo do protislovja. $\square$

Poglejmo, kako je uporabljen Dirichletov princip pri problemih s števili.

TRDITEV. *Iz množice števil $N = \{1, 2, ..., 2n\}$ vzemimo $n+1$ števil. Potem sta dve izmed njih tuji števili.*

To je prav tako očitno. To sta števili, ki se razlikujeta za 1 in sta zato tuji med seboj.

Zdaj pa si poglejmo, kako si je Erdos zastavil ta problem.

TRDITEV. *Naj bo* $A \subseteq \{1, 2, ..., 2n\}$ *in* $|A| = n + 1$. *Potem vedno obstajata taki dve števili* $x, y \in A$, *da je* x *deljiv z* y $(x|y)$.

To ni tako zelo očitno, ampak, ko je Erdos med neko večerjo ta problem zastavil mlademu matematiku Lajosu Posi, je le ta po končani večerji že imel odgovor.

Dokaz. Pomagajmo si z načelom golobnjaka. Vsako naravno število lahko zapišemo kot $2^k \cdot a$, kjer je $a \geq 0$ in a liho ker tako izključimo vse 2-kratnike števila a). Med števili $1, 2, ..., 2n$ tako a zavzame vrednosti 1,3,5,...,2n-1. Ker je v A n+1 elementov in le n lihih, ki so med seboj različni, morata v A biti dve števili z istim deliteljem.
Vzemimo npr. $n = 2^r \cdot a$ in $m = 2^s \cdot a$. Če je $r \leq s$ sledi $n = 2^r \cdot a | 2^s \cdot a = m$, če pa je $r > s$ potem sledi $m = s^s \cdot a | 2^r \cdot a = n$. Zato je eno število večkratnik drugega. $\square$

Še en Erdosov primer v zaporedjih.

TRDITEV. *V vsakem zaporedju* $a_1, a_2, ..., a_{m \cdot n+1}$, *m·n+1 realnih števil, obstaja, ali naraščajoče podzaporedje števil dolžine* $m + 1$:

$$a_{i_1} < a_{i_2} < ... < a_{i_{m+1}}; \qquad (i_1 < i_2 < ... < i_{m+1})$$

ali padajoče podzaporedje števil dolžine $n + 1$:

$$a_{j_1} > a_{j_2} > ... > a_{j_{n+1}}; \qquad (j_1 > j_2 > ... > j_{n+1})$$

ali oboje.

Dokaz. Tokrat uporaba Dirichletovega principa ni nujna.
Priredimo vsakemu a_i število t_i tako, da predstavlja dolžino najdaljšega naraščajočega podzaporedja, ki se začne z a_i. Če je $t_i \geq m + 1$ za nekatere i, potem imamo naraščajoče podzaporedje dolžine $m + 1$.

Predpostavimo, da je $t_i \geq m$ za vsak i. Funkcija $f : a_i \to t_i$ (ki slika iz množice $\{a_1, ...a_{m \cdot n+1}\}$ v $\{1, ..., m\}$) nam pove, da obstaja nek $s \in \{1, ..., m\}$, tak da je $f(a_i) = s$ za $\frac{m \cdot n}{m} + 1 = n + 1$ števil a_i.
Naj bodo $a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_{n+1}}$, $(j_1 < ... < j_{n+1})$ ta števila. Poglejmo si dve zaporedni števili a_{j_i} in $a_{j_{i+1}}$. Če je $a_{j_i} < a_{j_{i+1}}$, tedaj dobimo naraščajoče podzaporedje dolžine s, ki se začne pri $a_{j_{i+1}}$ in posledično naraščajoče podzaporedje dolžine s+1 z začetnim členom a_i, kar pa ni možno, saj je $f(a_{j_i}) = s$. Tako dobimo padajoče podzaporedje $a_{j_1} > a_{j_2} > ... > a_{j_{n+1}}$ dolžine $n + 1$. $\square$

Ta preprosto zveneč rezultat glede monotonih podzaporedij ima ne tako očitno posledico pri dimenziji grafov. Tu ne potrebujemo pojma dimenzije za splošne grafe ampak samo za polne grafe K_n. (Spomnimo se: To je graf na n-točkah, v katerem sta vsaki dve točki sosednji.) To lahko opišemo tudi na naslednji način:
Naj bo $N = \{1, ..., n\}$, $n \geq 3$, množica n elementov in vzemimo m permutacij $\pi_1, ..., \pi_m$ te množice. Pravimo, da te permutacije predstavljajo polni graf K_n, če za vsaka 3 števila i, j, k obstaja permutacija π , pri kateri je k za i in j. Dimenzija grafa K_n je enaka najmanjšemu m, za katerega obstajajo permutacije $\pi_1, ..., \pi_m$.

Kot primer vzemimo $dim(K_3) = 3$, saj vsako od treh števil mora biti zadnje:

$$\pi_1 = (1, 2, 3), \ \ \pi_2 = (2, 3, 1) \ \ in \ \ \pi_3 = (3, 1, 2).$$

Kaj pa K_4?
Povejmo najprej, da je $dim(K_n) \leq dim(K_{n+1})$. Vse kar storimo je, da v K_{n+1} izbrišemo $n + 1$ element.
Tako je $dim(K_4) \geq 3$, v bistvu je $dim(K_4) = 3$, če vzamemo
$\pi_1 = (1, 2, 3, 4)$
$\pi_2 = (2, 4, 3, 1)$
$\pi_3 = (1, 4, 3, 2)$
Pri vsakem črtamo $n + 1$ element, v našem primeru 4 in dobimo željeno.

Dokazati to, da je $dim(K_5) = 4$ pa ni tako lahko, vendar pa je presenetljivo, da je dimenzija enaka 4 vse do K_12, priK_13 pa je $dim(K_13) = 5$ Lahko bi rekli, da je $dim(K_n)$ *divja, čudna* funkcija. Pa ni. Ko gre n v neskončnost, se v bistvu $dim(K_n)$ dobro obnaša - ključ za iskanje nižje meje je prav načelo golobnjaka.

Zdaj pa si bomo pogledali trditev, ki govori še o enem primeru uporabe principa golobnjaka.

TRDITEV. *Če imamo n števil $a_1, a_2, ..., a_n$, ki niso nujno različna, potem obstaja množica zaporednih števil $a_k + 1, ..., a_l$, katerih*

$$\sum_{i=k+1}^{l} a_i$$

je večkratnik števila n.

Dokaz. Naj bo N množica: $N = \{0, a_1, a_1 + a_2, ..., a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n\}$ in R množica: $R = \{0, 1, 2, ..., n - 1\}$. Vzemimo preslikavo $f : N \to R$, ki je definirana takole: za vsak m iz množice naravnih števil, je $f(m)$ ostanek pri deljenju m z n.
Moč množice $N : |N| = n + 1$
Moč množice $R : |R| = n$
Ker je $|N| > |R|$ sledi po principu golobnjaka, da dobimo dve vsoti z istim ostankom. Naj bosta to vsoti: $a_1 + a_2 + ... + a_k in a_1 + a_2 + ... + a_l; k < l$. Potem velja: $n|(a_1 + a_2 + ... + a_l) - (a_1 + a_2 + ... + a_k)$. Odtod sledi: $n| \sum_{i=k+1}^{l} a_i$ oz. $\sum_{i=k+1}^{l} a_i$ je večkratnik števila n. $\square$

Pravilo štetja parov

Naj bosta X in Y dve končni množici števil:
$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$
$R \subseteq X \times Y$

Pa ponazorimo to z razpredelnico:

$x|y$	y_1	...	y_j	...	y_m
x_1	$\times$				$\times$
...				$\times$	
x_i		$\times$	$\times$		
...	$\times$				$\times$
x_n					

Če sta element množice $x_i \in X$ in element množice $y_i \in Y$ v relaciji, potem na presečišču narišemo križec. Velja: $(x_i, y_j) \in R$. Označimo križce v vrstici $x \in X$ takole: $v_x(R) = \{y \in Y; xRy\}$. Križce v stolpcu $y \in Y$ pa označimo takole: $s_y(R) = \{x \in X; xRy\}$. Pravilo štetja parov pravi, da če križce preštejemo po vrsticah, dobimo isto število, kot če jih preštejemo po stolpcih. Zapišimo zdaj to s simboli:

$$\sum_{x\in X} |v_x(R)| = \sum_{y\in Y} |s_y(R)| = |R|$$

Poglejmo si poseben primer:
Naj bo $X = Y = \{1, 2, ..., 8\}$ in $R = \{(i, j); iRj\} \subseteq X \times Y$, ki ji pripada naslednja razpredelnica:

$x\|y$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	×	×	×	×	×	×	×	×
2		×		×		×		×
3			×			×		
4				×				×
5					×			
6						×		
7							×	
8								×

Število križcev v stolpcu je ravno število deliteljev števila j. Pa označimo to število s $t(j)$. Kako pa je v povprečju s številom $t(j)$, ko j teče od 1 do n? V bistvu nas zanima povprečna vrednost $t(n)$, ki jo označimo s $\bar{t}(n)$ in jo izračunamo takole:

$$\bar{t}(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} t(j)$$

Poglejmo prvih nekaj vrednosti za $\bar{t}(n)$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{t}(n)$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	2	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{16}{7}$	$\frac{5}{2}$

Zdaj pa n pošljimo v neskončnost. Kakšna je potem povprečna vrednost števila $\bar{t}(n)$? Na prvi pogled se zdi nerešljivo, a ni tako težko.

Oglejmo si najprej funkcijo $t(n)$:

- za poljubno praštevilo p velja: $t(p) = 2$
- za števila oblike 2^k velja: $t(2^k) = k + 1$

Vidimo, da je funkcija $t(n)$ zelo nepredvidljiva in se zelo hitro spreminja. Ravno nasprotno velja za funkcijo $\bar{t}(n)$. Štetje po dveh poteh (po vrsticah in po stolpcih) nam da nepričakovan in enostaven odgovor.
Vzemimo (kot zgoraj) razpredelnico celih števil od 1 do n. S štetjem po stolpcih dobimo:

$$\sum_{j=1}^{n} t(j).$$

Kako pa je s štetjem po vrsticah? Medtem ko število križcev v j-tem stolpcu ustreza številu deliteljev števila j, število križcev v i-ti vrstici ustreza večkratnikom števila i: $i, 2i, 3i, ...\lfloor \frac{n}{i} \rfloor i$.
Tako dobimo:

$$\bar{t}(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} t(j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Razlika med $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor$ in $\frac{n}{i}$ je v vsakem členu manjša od 1, torej je celotna napaka v povprečju manjša od 1. Ker je zadnja vsota $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ približno enaka $log(n)$, z napako manjšo od 1, lahko povzamemo:

$$\bar{t}(n) \sim log(n),$$

kjer je napaka manjšo od 2. Funkcija $\bar{t}(n)$ se torej v primerjavi s $t(n)$ obnaša lepše.