Eulerjevi digrafi

16. maj 2005

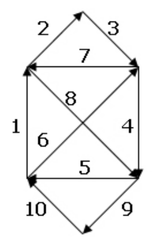
Definicije poti, sprehoda, obhoda in povezanosti so pri grafih in digrafih enake, če povezave obravnavamo kot urejene pare. V sprehodu $v_0, e_1, ..., e_k, v_k$ ima vsaka povezava e_i začetek v točki v_{i-1} in konec v točki v_i.

Definicija 1. *Eulerjeva pot je pot v digrafu (ali grafu), ki prehodi vse povezave. Opomba: Vsako povezavo prehodimo natanko enkrat.*

Eulerjev obhod je zaprta pot, torej se zaključi na svojem začetku (in vsebuje vse povezave). Digraf je Eulerjev, če premore Eulerjev obhod. Eulerjev obhod je zaprta Eulerjeva pot.

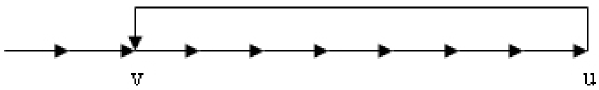
Karakterizacija Eulerjevih digrafov je analogna karakterizaciji Eulerjevih grafov.

Primer: Puščice $1, 2, 3, ..., 10$ označujejo Eulerjev obhod spodnjega grafa.



Lema 1. *Če je G digraf z minimalno vhodno stopnjo (število puščic v točko) vsaj 1 ali minimalno izhodno stopnjo (število puščic iz točke) vsaj 1, potem premore cikel.*

Dokaz. Naj bo P maksimalna pot v grafu G. Torej ni vsebovana v nobeni večji poti. u naj bo končna točka P. Ker je P maksimalna, je ne moremo

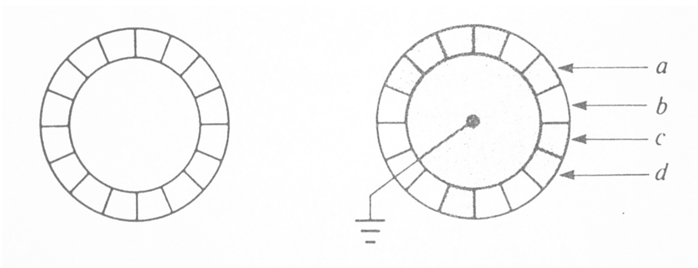


razširiti z nobeno dodatno povezavo. Puščica iz u gre do neke točke na poti P, npr. v. Iz tega sledi, da imamo cikle. □

Izrek 2. *Digraf je Eulerjev natanko tedaj, ko sta vhodna in izhodna stopnja vsake točke enaki in je temeljni graf povezan (ima natanko eno povezano komponento).*

Dokaz. Glej enostaven Eulerjev graf, s sodim številom povezav. □

Primer: de Bruijn graf oz. Problem vrtečega se bobna.
Naše kratko srečanje z Eulerjevimi digrafi zaključimo z nalogo, ki se pojavi v telekomunikaciji - tako imenovani problem vrtečega se bobna ali teleprinterjev problem. Površina vrtečega se bobna je razdeljena na 16 delov, kot



je prikazano na levi. Položaj bobna lahko predstavimo s štirimi binarnimi števkami a,b,c in d, kot je označeno na desni. na diagramu osenčena polja označujejo prevodni material, neosenčena polja pa neprevodni material. Odvisno od položaja bobna so izhodi z oznakami a,b,c in d lahko ozemljeni ali pa ne. na gornjem diagramu so na primer ozemljeni izhodi a,c in d.

Če želimo vseh 16 položajev bobna enolično predstaviti s signali a,b,c in d, potem je treba prevodna in neprevodna polja razporediti tako, da bomo dobili vseh 16 možnih vzorcev štirih zaporednih polj. Ale je to mogoče in če je, kako je treba razporediti polja?

Rešitev je dana na desni strani prejšnjega diagrama. Prikazani položaj ustreza binarnemu številu 1011, kjer 1 ustreza osenčenemu (prevodnemu) polju, 0 pa neosenčenemu (neprevodnemu) polju.

Če boben zavrtimo v nasprotni smeri urinega kazalca, dobimo naslednje dvojiške številke:

$$0110, 1100, 1001, 0010, 0100, 1000, 0000, 0001,$$

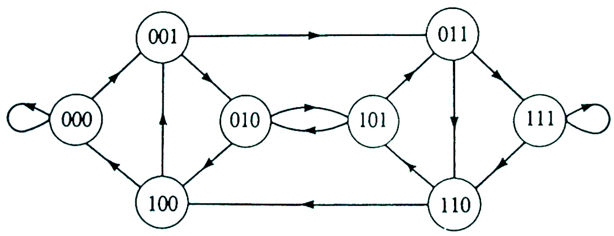
$$0011, 0111, 1111, 1110, 1101, 1010, 0101, 1011.$$

Te štiri bitne številke so vse različne in predstavljajo vseh 16 položajev bobna. Toda, kako smo prišli do te rešitve? Ali obstaja še kakšna druga rešitev?

Za odgovor na vprašanje konstruirajmo digraf; osem točk ustreza osmim bitnim besedam:

$$000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111;$$

usmerjeni povezavi gresta iz vsake točke abc k točkama $bc0$ in $bc1$. Tako dobimo digraf:



Ta digraf je očitno Eulerjev, saj sta vhodna in izhodna stopnja vsake točke enaki 2. Vsak Eulerjev obhod nam da rešitev problema vrtečega se bobna. Če na primer vzamemo Eulerjev obhod:

$$101 \to 011 \to 110 \to 100 \to 100 \to 001 \to 010 \to 100 \to 000 \to$$

$$000 \to 001 \to 011 \to 111 \to 111 \to 110 \to 101 \to 010 \to 101,$$

lahko 'stisnemo' dve zaporedni besedi (na primer $001 \to 110$ stisnemo v 0110) in dobimo zaporedje:

1011001000011110...,

ki nam da razporeditev na diagramu.

S podobnimi argumenti lahko rešimo vprašanje za bobne z 32, 64, ... polji. (Povzeto po knjigi: Uvod v teorijo grafov).

Izrek 3. *Digraf D_n (graf iz zgornjega primera) je Eulerjev. Označene povezave v vsakem Eulerjevem obhodu grafa D_n nam dajo ciklično zaporedje v katerem je 2^n zaporednih odsekov dolžine n paroma različnih.*

Avtor: Borut Vaupotič