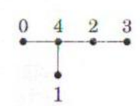
DEKOMPOZICIJA IN GRACILNE OZNAČITVE

Graf G lahko vedno dekomponiramo na posamezne povezave. Ali lahko G dekomponiramo v kopije večjega drevesa T?

2.2.13. Domneva (Ringel(1964)) Če je T drevo z m povezavami, potem lahko K_{2m+1} dekomponiramo v $2m + 1$ kopij drevesa T.

Poskusi, da bi dokazali Ringelovo domnevo so se osredotočili na močnejšo **Domnevo gracilnega drevesa**. Le-ta vklučuje Ringelovo domnevo.

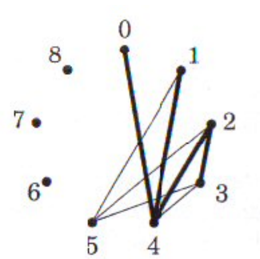
2.2.14. DEFINICIJA. Gracilna označitev grafa G z m povezavami je funkcija $f : V(G) \to \{0, ..., m\}$ tako da različne točke dobijo različna števila in $\{|f(u) - f(v)| : uv \in E(G)\} = \{1, ..., m\}$.Graf je gracilen, če ima gracilno označitev.



2.2.15. Domneva (Domneva gracilnega drevesa-Kotzig, Ringel (1964)) Vsako drevo premore gracilno označitev

2.2.16. Izrek (Rosa(1967)) Če ima drevo T z m povezavami gracilno označitev, potem lahko K_{2m+1} dekomponiramo v $2m + 1$ kopij drevesa T.

Dokaz Poglejmo na točke grafa K_{2m+1} kot na kongruenčne razrede po modulu $2m + 1$, urejene ciklično. *Razlika* med dvema kongruenčnima razredoma je 1, če sta zaporedna, 2, če je en razred med njima in tako naprej do razlike m. Povezave grafa K_{2m+1} razvrstimo v skupine glede na razliko med končnimi točkami. Za $1 \le j \le m$ obstaja $2m + 1$ povezav z razliko j.



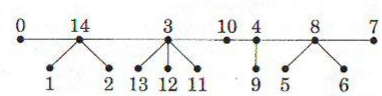
Glede na gracilno označitev drevesa T definiramo kopije drevesa T v K_{2m+1}; te kopije so $T_0, T_1, ..., T_{2m}$. Točke drevesa T_k so $k, ..., k+m$ (mod $2m+1$) pri čemer je $k+1$ sosednja $k+j$ natanko takrat, ko je i soseden j v gracilni označitvi drevesa T. Kopija T_0 izgleda kot gracilna označitev in ima povezave z vsako razliko. V vsaki naslednji kopiji se vse povazave premaknejo v druge in razlike se ohranijo, če dodamo ena k imenu vsake končne točke. Vsi različni razredi povezav imajo eno povezavo v vsakem T_k in zato $T_0, ..., T_{2m}$ razčleni K_{2m+1}.

Vemo, da gracilne označitve obstajajo za nekatere tipe dreves in za nekatere druge družine grafov. Preprosto je najti gracilne označitve za zvezde in poti.

Definirali bomo družino dreves, ki posplošuje oboje in če dovolimo dodajanje povezav k poti.

2.2.17. DEFINICIJA Gosenica je drevo v katerem je vsaka povezava sosednja s točkami na neki fiksni poti.

2.2.18. PRIMER Točke, ki ne ležijo na hrbtenici gosenice (noge) so listi. Spodaj so vidne gracilne označitve gosenice. Pravzaprav je vsaka gosenica gracilna.



Drevo Y ni gosenica.

2.2.19. Izrek Drevo je gosenica natanko takrat, ko ne vsebuje drevesa Y zgoraj.

Dokaz Naj G' označuje drevo, ki ga dobimo iz drevesa G, če izbrišemo vse liste drevesa G. Ker nobena od točk, ki ostanejo v G' niso listi v G, ima G' najvišjo točko stopnje vsaj 3 natanko takrat, ko se Y pojavi v G. Torej G nima kopij drevesa Y natanko takrat, ko je $\Delta(G') \leq 2$. To pa pomeni da je G' pot, kar je ekvivalentno, da je G gosenica.