Dinitzov problem
(seminarska naloga)

Rebeka Renko

22. april 2003

Metoda napada za Dinitzov problem je zdaj očitna: najti moramo orientacijo grafa S_n ki ima izhodno stopnjo $d^+(v) \leq n-1$ za vsak v in ki zagotovi obstoj jedra za vse inducirane grafe. To lahko dosežemo z naslednjim rezultatom.

Ponovimo:
Dvodelen graf $G = (X \cup Y, E)$ je graf katerega množico točk V lahko razbijemo na dva dela X in Y tako, da ima vsaka povezava iz G eno krajišče v X in drugo v Y.
Z drugimi besedami, dvodelni grafi so natanko tisti, katere lahko pobarvamo z dvema barvama (eno za X in eno za Y).

Prirejanje M v dvodelnem grafu $G = (X \cup Y, E)$ je množica povezav, takšnih da nobeni dve povezavi v M nimata skupnega krajišča

PRIMER1:
Slika1
Dvodelen graf, kjer potemnjene črte predstavljajo prirejanje.

Naj bo X množica vseh moških in naj bo Y množica vseh žensk ter naj nam $uv \in E$ predstavlja možnost, da se bo moški (u) lahko poročil z žensko (v). Prirejanje je potem množična poroka, kjer ne obstaja bigamija. Potem znan izrek o porokah daje natančno velikost največjega možnega prirejanja, upoštevajoč strukture dvodelnega grafa. Za naše namene pa potrebujemo bolj dodelano verzijo prirejanja predlagano od avtorjev Gale in Shapley. Očitno je, da imajo v življenju vsakega človeka neke stvari prednosti, kar dodamo k prejšnjemu nastavku. Predpostavimo, da v grafu $G = (X \cup Y, E)$ za vsak $v \in X \cup Y$ obstaja množica točk N(v),v kateri so točke sosednje z v in razporejene po prednostih, $N(v) = z_1 > z_2 > \ldots > z_{d(v)}$. Torej je z_1 prva izbira za v, sledi z_2 in tako dalje.

DEFINICIJA:
Prirejanje M grafa $G = (X \cup Y, E)$ se imenuje stabilno, če velja naslednji pogoj: če je $uv \in E \setminus M$, kjer je $u \in X$ in $v \in Y$, potem velja, da je:
ali $uy \in M$ za $y > v$ v N(u)
ali $xv \in M$ za $x > u$ v N(v)
ali oboje.

V vsakdanjem življenju pa je množica vseh porok stabilna, če se nikoli ne zgodi, da u in v nista poročena, ampak bi želel u imeti v za svojo nevesto in bi želela v imeti u za svojega ženina, kar pa bi očitno bila nestabilna situacija.

PRIMER2:
Slika2
Potemenjene povezave prikazujejo stabilno poroko. Potemenjene črke v vsakem seznamu predstavljajo stabilno poroko. V tem primeru opazimo, da obstaja edinstveno največje prirejanje M s štirimi povezavami, M={aC,bB,cD,dA}, ampak M ni stabilen (poglej cA).

LEMA2:
Stabilno prirejanje vedno obstaja.

DOKAZ:
Oglejmo si naslednji algoritem:
V **prvem koraku** vsi moški $u \in X$ zasnubijo ženske svoje prve izbire. Če ženska dobi več kot eno ponudbo, izbere tistega, katerega ima rajši in ga da na čakalno listo, če pa dobi le eno ponudbo, potem da tistega na čakalno listo. Preostali moški so zavrnjeni in tvorijo rezervo R.
V **drugem koraku** vsi moški iz rezerve R zasnubijo njihovo naslednjo izbiro. Ženske primerjajo snubce (skupaj s tistim, ki je na čakalni listi, če ta obstaja), izberejo najljubšega in ga dajo na čakalno listo. Preostali so zavrnjeni in tvorijo novo rezervo R.
Ponovno moški iz rezerve R snubijo njihovo naslednjo izbiro, itd.
Moški, ki je zasnubil svojo zadnjo izbiro in je ponovno zavrnjen, ne more več snubiti ter tudi ne more tvoriti rezerve. Po nekem času je rezerva R prazna in tukaj se algoritem konča.
SKLEP: Ko se algoritem konča, tvorijo moški na čakalni listi skupaj z njihovimi pripadajočimi ženskami stabilno prirejanje.
Opazimo, da se moški premikajo na čakalni listi glede na to, koga ima ženska raje, saj na vsaki stopnji ženska primerja svoje nove snubce s sedanjim ženinom ter nato izbere tistega, ki ji je najljubši.
Če je torej $uv \in E$, ampak $uv \notin M$ potem :
ali u nikoli ni zasnubil v, kar pomeni da je našel boljšo nevesto, še preden je uspel priti do v, iz česar sledi da je $uy \in M$ za $y > v$ v N(u)
ali pa je u zasnubil v, pa bil zavrnjen, sledi, da je $xv \in M$ za $x > u$ v N(v).
To pa je potreben pogoj za stabilno prirejanje. $\square$

IZREK (GALVIN-ova rešitev Dinitzovega problema):
$\chi_l(S_n) = n$ za vse n.

DOKAZ:
Označimo točke grafa S_n z (i,j), $1 \leq i, j \leq n$.
Tako so (i,j) in (r,s) sosednje, če in samo če i = r ali j = s.
Vzemimo katerikoli latinski kvadrat L s številkami $1, 2, \ldots, n$ in označimo z L(i,j) vnos v celico (i,j).
Nato pretvorimo S_n v usmerjen graf $\overrightarrow{S_n}$, tako da orientiramo vodoravne povezave z $(i, j) \longrightarrow (i, j')$, če $L(i, j) < L(i, j')$ in navpične povezave $(i, j) \longrightarrow (i', j)$, če $L(i, j) > L(i', j)$.Torej orientiramo vodoravno od manjšega do večjega elementa, navpično pa od večjega elementa do manjšega.
(slika 3).

Opazimo, da dobimo $d^+(i, j) = n - 1$ za vse (i,j). V bistvu, če L(i,j)=k, potem n-k celic v vrstici i vsebuje vnos večji kot k in k-1 celic v stolpcu j vsebuje vnos manjši kot k.
Po Lemi1 zadostuje pokazati, da vsak inducirani podgraf grafa S_n vsebuje jedro. Vzemimo podmnožico $A \subseteq V$. Naj bo X množica vrstic iz L in Y množica stolpcev. Priključimo k A dvodelen graf $G = (X \cup Y, A)$, kjer je vsaka $(i, j) \in A$ predstavljena s povezavo ij kjer je $i \in X, j \in Y$
(slika 4).

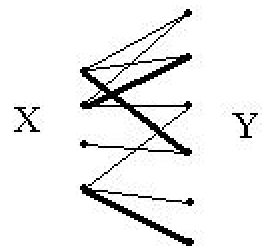
Orientacija S_n inducira razvrstitev množice sosednjih točk v $G = (X \cup Y, A)$ tako da velja
$j' > j$ v N(i) če $(i, j) \longrightarrow (i, j')$ v $\overrightarrow{S_n}$ oziroma
$i' > i$ v N(j) če $(i, j) \longrightarrow (i', j)$.
Po Lemi2 vsebuje $G = (X \cup Y, A)$ stabilno prirejanje M.
Ta M pa, predstavljen kot podmnožica množice A, predstavlja iskano jedro.
Zakaj? Prvič: M je neodvisen v A saj povezave v $G = (X \cup Y, A)$ nimajo skupnih krajišč z i oziroma j (po definiciji M).
Drugič: če je $(i, j) \in A \backslash M$, potem po definiciji stabilnega prirejanja obstaja ali $(i, j') \in M$ za $j' > j$ ali $(i', j) \in M$ za $i' > i$, kar pa za $\overrightarrow{S_n}$ pomeni:
$(i, j) \longrightarrow (i, j') \in M$ oziroma $(i, j) \longrightarrow (i', j) \in M$.
S tem je dokaz končan.

$\square$

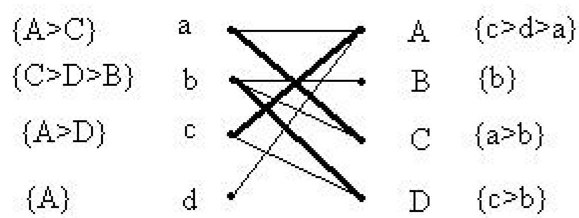
Za konec pa poglejmo še malo v ozadje zgodbe. Lahko opazimo da graf $S_n$izhaja iz dvodelnega grafa z enostavno konstrukcijo. Vzemimo polni dvodelen graf $K_{n,n}$, kjer $|X| = |Y| = n$, skupaj z vsemi povezavami med X in Y.
Če jemljemo povezave iz $K_{n,n}$ kot točke novega grafa, kjer lahko združimo dve točki le če imata kot povezavi v $K_{n,n}$ skupno krajišče, potem dobimo kvadraten graf S_n.
Recimo, da je S_n graf povezav grafa $K_{n,n}$. Potem lahko enako konstrukcijo naredimo za vsak graf G in bomo za rezultat vedno dobili graf povezav L(G) grafa G.

PRIMER3:
Slika5

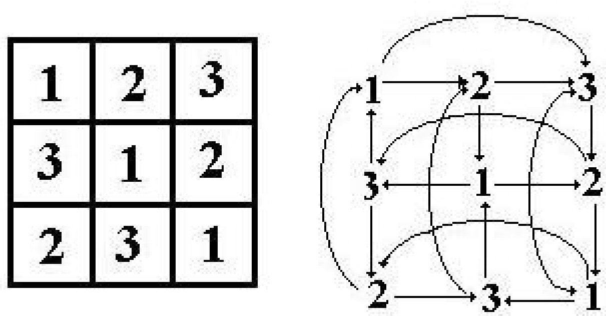
V splošnem imenujemo H graf povezav, če je H = L(G) za nek graf G. Seveda ni vsak graf graf povezav kot npr $K_{2,4}$, za katerega velja $\chi(K_{2,4}) < \chi_l(K_{2,4})$
Kaj pa če H je graf povezav? S pomočjo prejšnjega izreka lahko dokažemo, da velja $\chi(H) = \chi_l(H)$ vedno ko je H graf povezav dvodelnega grafa.
To nam morda lahko pomaga pri dokazu največje domneve na tem področju:
Ali $\chi(H) = \chi_l(H)$ velja za vsak graf povezav H?
O tem je znano zelo malo in ni videti nobenega pozitivnega rezulatata v tej smeri, ampak tako je izgledalo tudi v zvezi z Dinitzovim problemom pred 20 leti.



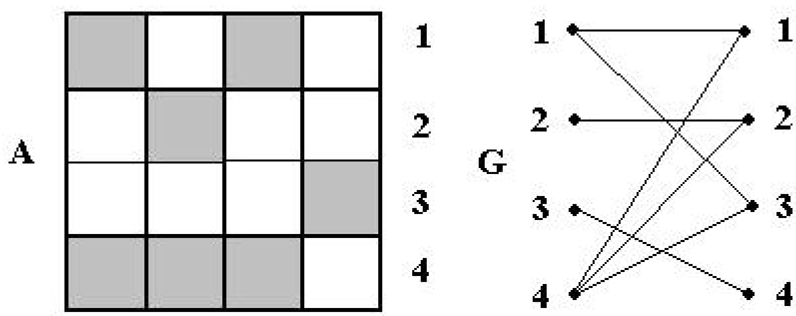
Slika 1: Primer1



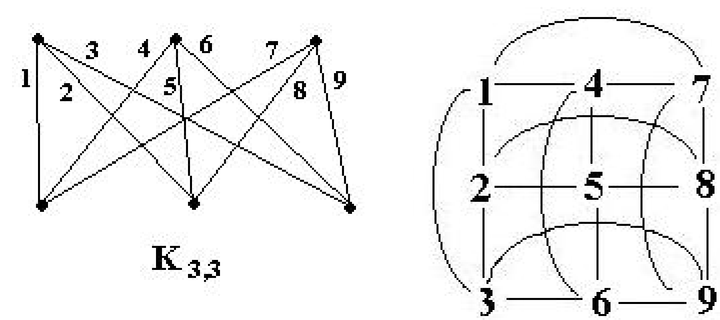
Slika 2: Primer2



Slika 3: Graf



Slika 4: Graf



Slika 5: Primer3