Seminarska naloga: **Dopolnjevanje latinskih kvadratov**

Aleksandra Goljat, Andreja Žigart

April 8, 2003

Latinski kvadrat je eden najstarejših kombinatoričnih objektov.

Definicija:

Latinski kvadrat dobimo tako, da zapolnimo n^2 celic $(n \times n)$ kvadratnega polja s števili $1, 2, ..., n$ tako, da se vsako število pojavi natanko enkrat v vsaki vrstici in vsakem stolpcu.
Z drugimi besedami: vsaka vrstica in vsak stolpec predstavljajo permutacije množice $\{1, 2, ..., n\}$.
n= **red latinskega kvadrata**

Primer:

n=4

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

Latinski kvadrat reda 4

Definicija:

Delni latinski kvadrat reda n dobimo tako, da zapolnimo nekatere celice $(n \times n)$ polja s števili $1, ..., n$ tako, da se vsako pojavi kvečjemu enkrat v vsaki vrstici in vsakem stolpcu.

Primer:

n=4

1	2	3	
	3		1
	1		
		1	2

Delni latinski kvadrat reda 4

Problem 1:

Kdaj lahko delni latinski kvadrat dopolnimo do latinskega kvadrata istega reda?

Primer:

1. n=5

1	2	3	4	5
4	5	2	1	3
5	4	1	3	2
2	3	4	5	1

   Zapolnjene imamo štiri vrstice. Delni latinski kvadrat lahko dopolnimo do latinskega kvadrata na en sam način.

2. n=5

2	5	4	3	1

   Zapolnjeno imamo le eno vrstico. Najlažje dopolnimo delni latinski kvadrat do latinskega kvadrata, da vrstico ciklično premikamo v levo. Takšen latinski kvadrat imenujemo **ciklični latinski kvadrat**.

3. n=5

1	4	2	5	
				3

   Delni latinski kvadrat ima zapolnjenih le n=5 celic, a ga ne moremo dopolniti do latinskega kvadrata.

Problem 2:

Ali lahko delni latinski kvadrat, ki ima napolnjenih manj kot n celic, vedno dopolnimo do latinskega kvadrata?

S tem problemom se je ukvarjal leta 1960 Trevor Evans. Da je to vedno možno, je dokazal leta 1981 Bohdan Smetuniuk. Preden to dokažemo, si poglejmo latinske kvadrate na splošno.
Na latinski kvadrat lahko gledamo kot na $(3 \times n^2)$ **vrstično polje**.

Primer:

n=3

1	3	2
2	1	3
3	2	1

(3×3^2) vrstično polje:

R	1	1	1	2	2	2	3	3	3
C	1	2	3	1	2	3	1	2	3
E	1	3	2	2	1	3	3	2	1

Če permutiramo vrstice R,C,E, dobimo vrstično polje nekega drugega latinskega kvadrata.

$R \to C \to E \to R$

(3×3^2) vrstično polje:

R	1	3	2	2	1	3	3	2	1
C	1	1	1	2	2	2	3	3	3
E	1	2	3	1	2	3	1	2	3

Dobili smo naslednji latinski kvadrat:

1	2	3
3	1	2
2	3	1

Latinske kvadrate, ki so tako povezani med sabo, imenujemo **konjugirani**.

Delni latinski kvadrat lahko dopolnimo do latinskega kvadrata natanko tedaj, ko lahko dopolnimo konjugiran delni latinski kvadrat (dopolnimo konjugiranega in naredimo inverzno permutacijo).

Definicija:

Delni latinski kvadrat, ki ima popolnoma zapolnjenih prvih r vrstic ostale celice pa so prazne, imenujemo $(r \times n)$ **latinski pravokotnik**.

Lema 1:

Vsak $(r \times n)$ latinski pravokotnik, $r < n$, lahko razširimo na $((r+1) \times n)$ latinski pravokotnik in postopoma do latinskega kvadrata.

Dokaz:

Uporabimo Hallov izrek. Naj bo A_j množica števil, ki se ne pojavijo v j-tem stolpcu. $(r+1)$. vrstici odgovarja sistem različnih predstavnikov iz množic $A_1, ..., A_n$. Da dokažemo lemo, moramo dokazati Hallov pogoj. Vsaka množica A_j ima $n-r$ elementov in vsak element se nahaja v natanko $n-r$ množicah A_j (r krat se pojavi v prvih r vrsticah). Poljubnih m množic A_j vsebuje $m(n-r)$ elementov in zato vsaj m različnih, kar pa zadošča Hallovemu pogoju. □

Lema 2:

Naj bo P delni latinski kvadrat reda n, ki ima napolnjenih kvečjemu $n-1$ celic s kvečjemu $\frac{n}{2}$ različnimi elementi. Potem lahko P dopolnimo do latinskega kvadrata reda n.

Dokaz:

Problem prevedemo v enostavnejšo obliko. S konjugiranjem lahko pogoj "največ $\frac{n}{2}$ različnih elementov" spremenimo v pogoj "največ $\frac{n}{2}$ vrstic". Predpostavimo lahko, da so zapolnjene zgornje vrstice. Naj bodo te vrstice $1, 2, ..., r$ z f_i zapolnjenimi celicami v vrstici i, kjer je $r \leq \frac{n}{2}$ in $\sum_{i=1}^{r} f_i \leq n-1$. S permutacijo vrstic lahko predpostavimo, da je $f_1 \geq f_2 \geq ... \geq f_r$. Postopoma zapolnimo vrstice $1, 2, ..., r$, da dobimo $(r \times n)$ latinski pravokotnik, ki ga lahko po lemi 1 dopolnimo do latinskega kvadrata. □

Primer:

n=6

	4			2	
3			4		
					3

Izrek:

Delni latinski kvadrat reda n, ki ima napolnjenih največ $n-1$ celic, lahko dopolnimo do latinskega kvadrata istega reda.

Dokaz:

Za dokaz uporabimo indukcijo po n.
Za $n \leq 2$ je trivialno.
Recimo, da je P delni latinski kvadrat reda $n+1$, ki ima zapolnjenih največ n celic. Po lemi 2: predpostavimo, da imamo $\frac{n+1}{2}$ različnih elementov in obstaja element, ki se pojavi le enkrat; imenujmo ga $n+1$.
Kot prej predpostavimo, da je število delno zapolnjenih vrstic r: $s_1, ..., s_r$ z $f_1, ..., f_r$ zapolnjenimi celicami. $\sum_{i=1}^{r} f_i \leq n$. Recimo, da se element $n+1$ nahaja v vrstici s_1.
Premaknili bomo vse napolnjene celice nad diagonalo, razen celico z elementom $n+1$, ki bo premaknjena na diagonalo.
Na prvem koraku bomo premaknili s_1 na $n+2-f_1$. S permutiranjem stolpcev premaknemo napolnjene celice na levo tako, da je element $n+1$ zadnji v svoji vrsti.
Na drugem koraku prestavimo s_2 na $n+1-f_1-f_2$ in napolnjene celice čim bolj levo.
Na i-tem koraku prestavimo s_i na $n+1-f_1-f_2-...-f_i$ in napolnjene celice čim bolj levo.
Glavna ideja dokaza: Zbrišemo element $n+1$ in zadnjo vrstico ter zadnji stolpec. Ostal nam je delni latinski kvadrat reda n, ki ga lahko po indukcijski predpostavki dopolnimo do latinskega kvadrata reda n (L). Ta kvadrat odrežemo tako, da ohranimo celice nad diagonalo in na diagonali, izpraznemo spodnji del in dodamo vrstico (L'). Dobimo na pol napolnjen $((n+1)\times n)$ pravokotnik. Če lahko spodnji del pravokotnika napolnimo z elementi $1, 2, ..., n$ tako, da obdržimo delni latinski kvadrat reda $n+1$, potem lahko diagonalo napolnimo z elementom $n+1$. Nato dodamo zadnji stolpec (lema 1) in dokaz bo končan.
Pri napolnjevanju vrstic si pomagamo z napolnjenim latinskim kvadratom reda n.
Naj bo $k \geq 3$ in predpostavimo, da smo napolnili vrstice $3, ..., k-1$ z upoštevanjem naslednjih pogojev:

- $k-2$ elementov stolpca j v L' (različnih od n+1) spadajo med prve $k-1$ elemente stolpca j v L, za $n-k+3 \leq j \leq n$. Ostane nam natanko en mankajoč element za vsak stolpec.

- Ti elementi x_j so različni.

Nadaljujemo z vrstico k. Naj bodo $y_{n-k+2}, ..., y_n$ elementi vrstice k. Element y_{n-k+2} je mankajoči element stolpca $n-k+2$. V prvem poskusu napolnimo vrstico k z elementi $y_{n-k+3}, ..., y_n$. $x_j \neq y_j$ za vsak y_j iz L. To bo delovalo razen v primeru $x_j = y_{n-k+2}$ za nekatere $j \geq n-k+3$, ker ne zadoščajo pogojem mankajočih elementov. V tem primeru zamenjamo x_j in y_s. Končali smo, razen če $x_l = y_j$ za nek $l \neq j$. Potem zamenjamo x_l in y_j in to ponavljamo, dokler ne zadoščajo vsem pogojem. Tako zapolnimo vse vrstice do n. Zadnjo vrstico $n+1$ zapolnimo z mankajočimi elementi in dokaz bo končan. $\square$

Primer:

n+1=7

	2			7		
		4		5		
			5			
	4					

1.korak:

	5	4				
			5			
2	7					
4						

4. korak:

4						
			5			
	5	4				
2	7					

Latinski kvadrat reda 6 (L):

4	1	2	6	3	5
3	6	1	5	4	2
1	5	4	3	2	6
5	3	6	2	1	4
6	2	3	4	5	1
2	4	5	1	6	3

Latinski pravokotnik (7×6) (L'):

4	1	2	6	3	5
3	6	1	5	4	
1	5	4	3		
5	3	6			
6	2				
2					

Latinski kvadrat reda 7:

4	1	2	6	3	5	7
3	6	1	5	4	7	2
1	5	4	3	7	2	6
5	3	6	7	2	4	1
6	2	7	4	5	1	3
2	7	5	1	6	3	4
7	4	3	2	1	6	5