Ekstremalni problemi

Tjaša Rajšp

marec, 2004

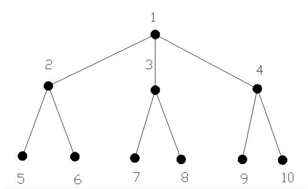
1 Ekstremalni problemi

1.1 Kletke

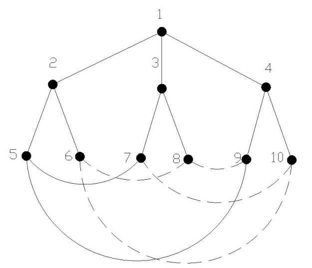
Problem: Poišči najmanjši kubični graf z obsegom g.
Če je g=3, potem je $G = K_4$.
Če je g=4, potem je $G = K_{3,3}$.
Za večje vrednosti g rešitev težje poiščemo.
Najmanjši 3-regularen graf z dolžino najkrajšega cikla g se imenuje ***g-KLETKA****.*
Torej je K_4 3-kletka, $K_{3,3}$ pa 4-kletka.

Izrek 1 Petersenov graf je edina 5-kletka.

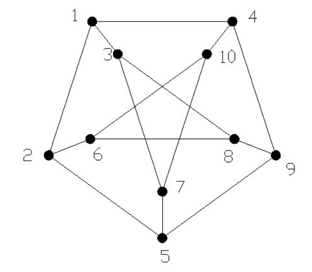
Dokaz. Naj bo G poljubna 5-kletka. Fiksirajmo točko v G, ki leži na petem ciklu, in jo imenujmo 1. Ker je G 3-regularen graf, ima 1 tri sosede. Imenujmo jih 2,3,4. Vsaka od teh točk ima dva nova soseda. Nobena od točk 5,6,7,8,9 ali 10 ne more biti enaka točkam 2,3 ali 4, ker bi v tem primeru G vseboval trikotnik. Vseh deset točk mora biti različnih, saj bi sicer G vseboval cikel dolžine najmanj 4. Potemtakem obstaja najmanj 10 točk v G. Predpostavimo, da G nima več kot 10 točk. Točka 5 mora biti sosednja dvema točkama in ne sme biti sosednja točki 6, ker bi drugače dobili trikotnik. Torej je točka 5 lahko sosednja samo eni izmed točk 7 in 8 in samo eni izmed točk 9 in 10. Brez izgube za splošnost naj bo 5 sosednja 7 in 9. Podobno točka 6 ne sme biti sosednja 7 ali 9, ker bi tako dobili 4-cikel, torej bo 6 sosednja 8 in 10. Točka 7 ne sma biti sosednja 8 ali 9, saj bi tako dobili trikotnik. Torej mora biti 7 sosednja 10 in 8 sosednja 9. Graf, ki ga na ta način dobimo, ima dolžino najkrajšega cikla 5. Torej dokazali smo, da mora imeti 5-kletka najmanj 10 točk. Graf G je 5-kletka.
Dokazati še moramo, da obstaja natanko en tak graf. Ponovno narišemo sliko 4.2.2. Ugotovimo, da je G izomorfen Petersenovemu grafu. Petersenov graf je edina 5-kletka, saj mu je vsaka druga 5-kletka izomorfna. □



Slika 4.2.1.



Slika 4.2.2.

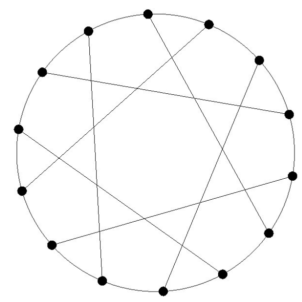


Slika 4.2.3.

Petersenov graf

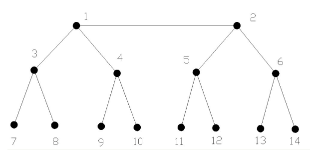
Izrek 2 Heawoodov graf je edina 6-kletka.

Dokaz. Naj bo G poljubna 6-kletka. Fiksirajmo poljubno povezavo grafa G in označimo končne točke z 1 in 2. Ker je G 3-regularen graf , je vsaka končna točka sosednja dvema različnima točkama. Točke 3,4,5,6 ne morejo biti sosednje druga drugi, ker bi sicer imeli cikel dolžine manjše od 6. Torej mora biti vseh 14 točk različnih. Predpostavimo, da obstaja 6-kletka z natanko 14 točkami. Točka 7 naj bo sosednja točkama 11 in 13, 8 naj bo sosednja 12 in 14, 9 naj bo sosednja 11 in 14, 10 naj bo sosednja 12 in 13. Graf, ki ga na ta način dobimo ima dolžino najkrajšega cikla 6. Torej dokazali smo, da mora imeti 6-kletka najmanj 14 točk. Graf G je 6-kletka. Dokažimo še, da obstaja natanko en tak graf. G je izomorfen Heawoodovemu grafu. Heawoodov graf je edina 6-kletka, saj mu je vsaka druga 6-kletka izomorfna. □



Slika 4.2.4.

Heawoodov graf

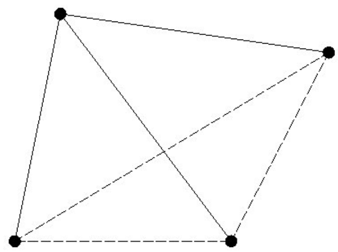


Slika 4.2.5.

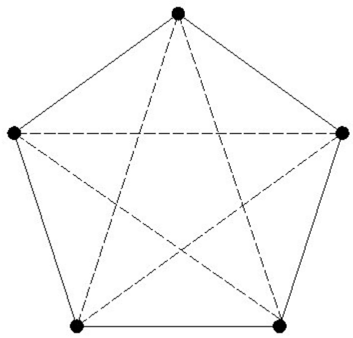
1.2 Ramsey-ev izrek

Problem: Dokaži, da če so vse povezave K_6 pobarvane z dvema barvama, potem obstaja monokromatičen trikotnik in da je K_6 minimalen s to lastnostjo.

Naj bodo povezave K_6 pobarvane z modro in rdečo barvo in naj bo v katerakoli točka v K_6. Torej obstajajo najmanj tri rdeče ali modre povezave s skupno točko v, saj je točka v stopnje 5.
Predpostavimo, da obstajajo tri rdeče povezave s skupno točko v. Če obstaja še katerakoli rdeča povezava, potem obstaja rdeč trikotnik. (Če so vsi robovi modri, potem obstaja moder trikotnik.) Torej K_6 pri barvanju z dvema barvama vsebuje monokromatičen trikotnik.



Slika 4.3.1.



Slika 4.3.2.

Če so povezave K_{18} pobarvane z rdečo in modro, mora obstajati rdeč ali moder K_4, da je K_{18} minimalen s to lastnostjo.

Izrek 3 *(Ramsey) Za vsako število n obstaja najmanjše število r(n), da vsak polni graf na vsaj r(n) točkah pri poljubnem barvanju z modro in rdečo barvo vsebuje moder ali rdeč* K_n.

Izrek 4 *Za vsako število m in n obstaja Ramsey-jevo število r(m,n) tako, da vsak graf* $K_{r(m,n)}$ *pri poljubnem barvanju z rdečo in modro barvo vsebuje rdeč* K_m *ali moder* K_n *in velja:*

$$r(m, n) \leq r(m - 1, n) + r(m, n - 1)$$