Ekstremalni problemi

Urška Degiampietro

marec, 2004

1 Ekstremalni problemi

1.1 Turanov izrek

Ekstremalni problemi so problemi o tem, kaj je največji ali najmanjši graf s specifično lastnostjo.Največji graf je graf z največ povezavami podanimi s številom točk.
Število točk na grafu G imenujemo **red grafa G**.
Število povezav grafa G imenujemo **velikost grafa G**.
H je inducirani podgraf grafa G, če je $V(H) \subseteq V(G)$ in če sta točki u,v, $u \neq v$, $u, v \in V(H)$ povezani v G, potem sta povezani tudi v H.

PROBLEM: Poišči največji graf G z n točkami in kromatičnim številom 2.

Ker ima graf G kromatično število 2, so točke pobarvane z dvema barvama,na primer z rdečo in modro. Če obstaja rdeča točka, ki ni sosednja modri točki, lahko ti dve točki povežemo in s tem povečamo število povezav. Torej je vsaka modra točka sosednja vsaki rdeči in imamo polni dvodelni graf. Naj ima graf G m modrih in r rdečih točk, $m + r = n$. Pokazali bomo:

$$|m - r| \leq 1.$$

Naj bo $r \leq m$. Če je $r + 2 \leq m$, potem izberemo drugi polni dvodelni graf H, ki ima $r + 1$ rdečih točk in $m - 1$ modrih točk. Torej ima graf G $m \times r$ povezav, graf H pa $(m - 1) \times (r - 1)$ povezav. Torej:

$$(m - 1) \times (r - 1) - m \times r = m - r - 1.$$

Iz predpostavke $r + 2 \leq m$ sledi $m - r - 1 \geq 1$. Torej ima graf H najmanj eno povezavo več kot graf G, njegovo kromatično število in število točk je ostalo enako. Iz tega sledi, da se m in r razlikujeta največ za ena. Če je število točk $n = 2k$, potem sta m in r enaka k.

Obstaja še druga pot do tega rezultata. Uporabimo **Gaussov simbol za največjo celoštevilsko funkcijo**.
$[x]$ je največje celo število, ki je manjše ali enako x.
(Včasih namesto oznake $[x]$ pišemo $\lfloor x \rfloor$.) Oznako $\lfloor x \rfloor$ imenujemo **talni simbol**.
$\lceil x \rceil$ **je najmanjše celo število večje ali enako** x**.** Oznako $\lceil x \rceil$ imenujemo **stropni simbol**.

Primer:

$$\left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor = 1$$

$$\left\lceil \sqrt{2} \right\rceil = 2$$

Z uporabo tega zapisa je graf G, ki je rešitev našega problema enak grafu $K_{m,r}$, kjer je

$$m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

in

$$r = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Izrek 1 Največji graf z n točkami in kromatičnim številom k je polni k-delni graf

$$K_{n_1,n_2,...,n_k},$$

kjer je

$$n = n_1 + n_2 + ... + n_k$$

in

$$|n_i - n_j| \leq 1.$$

Dokaz. Ker je kromatično število grafa G enako k, lahko točke pobarvamo s k barvami. Naj bo m_i število točk pobarvanih z i-to barvo, kjer je $i = 1, 2, ..., k$ in $n = m_1 + m_2 + ... + m_k$. Ker ima graf G maksimalno število povezav, je vsak par točk, ki sta pobarvani z različno barvo, soseden. Torej je graf G polni k-delni graf $K_{m_1,m_2,...,m_k}$. Če označimo v grafu $K_{m_1,m_2,...,m_k}$ število povezav z $A(m_1, m_2, ..., m_k)$, potem je

$$A(m_1, m_2, ..., m_k) = m_1 m_2 + A(m_1 + m_2, m_3, ..., m_k).$$

Predpostavimo, da se v grafu G vsaki dve taki števili razlikujeta za več ali enako od 1: $m_2 + 2 \leq m_1$ Dobimo nov graf

$$\hat{G} = K_{m_1-1,m_2+1,m_3,...,m_k}.$$

Število povezav v grafu $\hat{G}$ je

$$A\left(m_1 - 1, m_2 + 1, m_3, ..., m_k\right) = \left(m_1 - 1\right)\left(m_2 + 1\right) + A\left(m_1 + m_2, m_3, ..., m_k\right).$$

Razlika povezav grafa $\hat{G}$ in grafa G je:

$$(m_1 - 1)(m_2 + 1) - m_1 m_2 = m_1 - m_2 - 1.$$

Torej ima graf $\hat{G}$ najmanj en povezavo več kot graf G. Iz tega sledi, da graf G nima maksimalno število povezav. Torej nas predpostavka $m_1 \geq m_2 + 2$,$m_1 - m_2 - 1 \geq 1$ vodi do protislovja, da se vsak par števil m_i in m_j razlikujeta za največ 1. $\square$

Izrek 2 (Turanov izrek) Največji graf z n točkami, ki ne vsebuje nobenega podgrafa izomorfnrga K_{k+1}, je polni k-delni graf

$$K_{n_1,n_2,\ldots,n_k},$$

kjer je

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

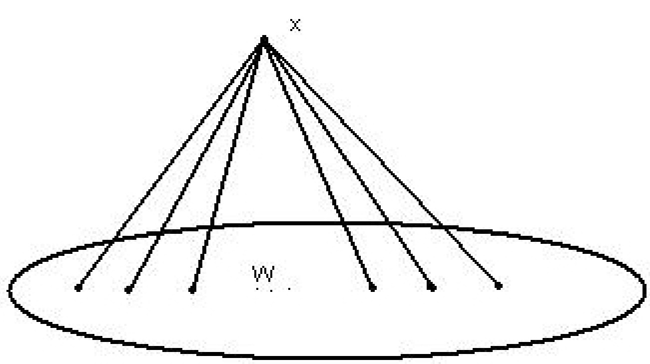
in

$$|n_i - n_j| \leq 1.$$

V bistvu sta Izrek 1 in Turanov izrek podobna. Predpostavka izreka1 implicira predpostavko Turanovega izreka, obrat pa ne velja. Namreč graf s kromatičnim številom k ne vsebuje nobenega podgrafa izomorfnega K_{k+1}.

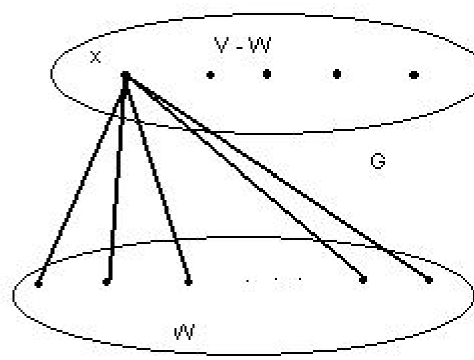
Izrek 3 Največji graf z n točkami, ki ne vsebuje nobenega trikotnika, je polni dvodelni graf K_{n_1,n_2},kjer je $n = n_1 + n_2$ in $|n_1 - n_2| \leq 1$.

Dokaz. Naj graf G z n točkami ne vsebuje nobenega trikotnika. Naj bo V množica točk grafa G. Izberimo točko x iz G z največjo stopnjo v grafu G. To pomeni: $deg_G(x)$ je maksimalna. Oglejmo si množico W vseh točk grafa G, ki so sosednje točki x. W imenujemo soseščina od x. Nobeni dve točki nista sosednji, namreč sicer bi graf G vseboval trikotnik. Definirajmo novi graf H



Slika 1: Slika1

z isto množico točk V kot v grafu G. Naj bo W enaka podmnožica točk iz V kot v zgornjem primeru. Tedaj je vsaka točka grafa H v V-W sosednja vsaki točki v W in v H ni nobena druga točka. Z drugimi besedami, H je polni dvodelni graf. Če je z najvišja točka v V-W, potem velja:



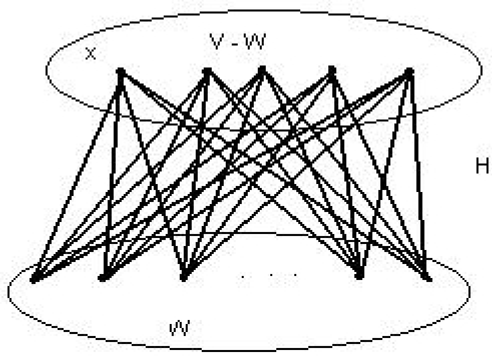
Slika 2: Slika2

$$deg_H(z) = deg_H(x) = deg_G(x) \geq deg_G(z),$$

namreč x smo izbrali za točko maksimalne stopnje v grafu G. Predpostavimo, da je število točk v W enako w.Če je z točka v W, potem velja:

$$deg_H(z) = n - w \geq deg_G(z),$$

namreč nobeni dve točki v W ne moreta biti sosednji v G, saj bi v tem primeru G vseboval trikotnik. Torej za nov graf H velja: $deg_G(z) \leq deg_H(z)$. To pomeni, da mora biti skupno število točk v H večje ali enako skupnemu številu točk v G. H je torej polni dvodelni graf in v dokazu izreka1 smo videli, da je največji polni dvodelni graf z n točkami K_{n_1,n_2}, kjer je $n = n_1 + n_2$ in $|n_1 - n_2| \leq 1$. $\square$



Slika 3: Slika3