IZREK: ERDÖS - KO - RADO

Mateja Frangež

1. april 2003

V predhodnjem seminarju smo govorili o prvem znanem izreku tega poglavja. Drugi izrek pa je popolnoma drugačne narave.

Imejmo množico z n-elementi N $= \{1, 2, ..., n\}$.
Imenujmo družino $\mathcal{F}$, ki je družina vseh podmnožic, PRESEČNA DRUŽINA, če imata vsaki dve množici te družine najmanj en element skupen. Skoraj očitno je, da je velikost največje presečne družine enaka 2^{n-1}.

Naprimer, če je $\mathcal{F}$ presečna družina $\mathcal{F}$, ki vsebuje množice A_1,A_2,...,A_{10}, potem ${A_1}^c$,${A_2}^c$,...,${A_{10}}^c \notin \mathcal{F}$, saj je A$\cap$ $A^c = \{\}$ in takih množic ni v presečni družini. Zato je $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$, ker imamo množice z n- elementi in ker njihovih komplementov ni v tej družini.

Po drugi strani pa če pogledamo, da družina vseh podmnožic $\mathcal{F}$ vsebuje vse take množice, katerih $1 \in$ X, to so ravno $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, ..., n\}$ in teh je 2^{n-1}. S tem smo dokazali, da je velikost največje presečne družine enaka 2^{n-1}.

Sedaj pa si postavimo naslednje vprašanje: **kako velika je lahko presečna družina $\mathcal{F}$, če imajo vse množice v $\mathcal{F}$ enako število elementov, recimo k.** Takšne družine imenujemo *presečne k - družine.* Da se izognemo trivialnemu primeru, predpostavimo, da je $n \geq 2k$, sicer se katerikoli množici sekata in nimamo kaj dokazovati. Sedaj pa jemljimo vse družine oblike, da je moč X enaka k in 1 je element vsake množice X. Očitno si bomo zagotovili vse k-množice, če bomo vzeli vse (k-1) podmnožice, ki vsebujejo 1, množice $\{2, 3, .., n\}$. **Zato je moč $|\mathcal{F}| = \binom{n-1}{k-1}$.** Kar je ravno število (k-1) podmnožic v množici z n elementi.

$IZREK : Erdös - Ko - Rado$
Največja velikost presečne k-družine množice z n-elementi je $\binom{n-1}{k-1}$, kjer je $n \geq 2k$.

Do tega izreka so Erdös, Ko in Rado prišli leta 1938, toda objavljen je bil šele 23 let kasneje. Mnogi znani matematiki so ta izrek dokazali, a enega izmed najelegantnejših dokazov je podal Gyula Katona.
Ključ tega dokaza je pravzaprav naslednja lema, za katero se na prvi pogled

zdi, da sploh ni povezana z našim izrekom.

LEMA : **Naj bo $n \geq 2k$. Naj se lok dolžine k sestoji iz k+1 zaporednih točk in k povezav med njimi. Predpostavimo, da je podano vsaj t različnih lokov A_1,A_2,...,A_t dolžine k, takšnih, da imata vsaka dva loka skupno vsaj eno povezavo. Potem je $t \leq k$.**

Dokaz leme : Zamislimo si krog, ki je razdeljen z n točkami in ima n povezav. Naj se lok C dolžine k sestoji iz k+1 zaporednih točk in k povezav med njimi. **Preden dokažemo lemo, povejmo, da je vsaka točka iz loka C krajišče vsaj enega loka.** Seveda, če imata loka A_i in A_j skupno krajišče v, potem se morata začeti na različnih straneh tega krajišča (ker sta različna). Potem pa ne moreta imeti skupne povezave, saj je $n \geq 2k$.

Fiksirajmo lok A_1 (vseh točk ima k+1, njegova dolžina pa je k), ker ima vsak lok A_i, kjer je $i \leq 2$ skupno povezavo z A_1, je eno izmed krajišč loka A_i notranja točka A_1. *Ker morajo biti vsa krajišča različna, kot smo pravkar videli in ker ima A_1 k-1 notranjih točk, zato lahko rečemo, da je največ k-1 nadaljnjih lokov in zato največ k lokov vse skupaj.* S tem je naša lema dokazana.

Dokaz izreka : Naj bo $\mathcal{F}$ presečna k-družina. Predpostavimo krog C z n-točkami in n-povezavami. Vzemimo poljubno ciklično permutacijo n-elementov. Preštejmo število množic A$\in$ $\mathcal{F}$, ki se pojavljajo kot k zaporedna števila v loku C. Ker je $\mathcal{F}$ presečna k- družina vidimo po naši lemi, da dobimo kvečjemu k takšnih množic. To velja za vsako ciklično permutacijo, ki vemo, da jih je (n-1)!. S tem dobimo kvečjemu k(n-1)! množic družine $\mathcal{F}$, ki se pojavljajo kot zaporedni elementi vsake ciklične permutacije.
Sedaj pa se vprašajmo kolikokrat štejemo fiksen element množice A$\in$ $\mathcal{F}$. Imamo k! možnosti, da zapišemo A zaporedoma in (n-k)! možnosti, da uredimo vse preostale elemente.
Torej lahko zaključimo, da se fiksna množica A pojavlja v točno k!(n-k)! cikličnih permutacijah, tako velja ocena:

$|\mathcal{F}| \leq \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{k(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!} = \binom{n-1}{k-1}$.

S tem je naš izrek dokazan.

Vprašamo se lahko, če so družine, ki vsebujejo fiksne elemente edine presečne k- družine. To zagotovo ni res za n = 2k.
Naprimer, če je n = 4 in k = 2, ima družina $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ velikost 3.

Splošno lahko rečemo, da za n = 2k dobimo maksimalno presečno k-družino velikosti $\binom{n-1}{k-1}$.