Seminarska naloga:
Hallov poročni izrek

Darja Štravs

April 1, 2003

Uvod

Poročni izrek je eden izmed treh znamenitih izrekov na končnih množicah. Dokazal ga je Philip Hall leta 1953. Predstavlja začetek teorije, ki jo danes imenujemo teorija prirejanj in je zelo uporabna.

Definicija:
Naj bo X končna množica in $A_1, A_2, ..., A_n$ njene podmnožice (ne nujno različne).
Zaporedju $x_1, x_2, ..., x_n$ pravimo SISTEM RAZLIČNIH PREDSTAVNIKOV (SRP) $A_1, A_2, ..., A_n$, če $x_i \in A_i$ in so x_i paroma različni elementi.
(i $\in$ {1, 2, ... , n}, $n \in \mathbf{N}$)

Tak sistem ne obstaja vedno, npr. kadar je katera od množic A_i prazna.
Izrek govori ravno o tem, kdaj takšno zaporedje obstaja.

Uporaba Hallovega izreka v vsakdanjem življenju

Naj bo {1,2,3,...n } množica deklet in X množica fantov.
x $\in A_i$ pomeni, da sta si dekle **i** in fant **x** naklonjena za poroko, množica A_i pa predstavlja vse možne kandidate, s katerimi bi se poročilo dekle i.
SRP je v tem primeru masovna poroka, pri kateri se vsako dekle poroči z željenim fantom. ♡

PRIMER 1:

Naj bo { d_1, d_2, d_3 } množica deklet in { f_1, f_2, f_3 } množica fantov.
Recimo, da bi se dekle d_1 želelo poročiti z enim izmed fantov f_1, f_2. Tako se je odločilo tudi dekle d_2. Dekle d_3 pa bi izbiralo med f_3 in f_1.

Hitro ugotovimo, da masovno poroko, pri kateri se vsako dekle poroči z željenim fantom, lahko izvedemo; z drugimi besedami SRP obstaja.
(Ugodna rešitev je npr. d_1 - f_1, d_2 - f_2 in d_3 - f_3.)

PRIMER 2:

Spet vzemimo { d_1, d_2, d_3 } množico deklet in { f_1, f_2, f_3 } množico fantov. Dekle d_1 bi se poročilo s f_1 ali f_3; dekle d_2 s f_3 in d_3 s f_1.

Tokrat pa masovne poroke, s katero bi bili vsi zadovoljni, ne moremo izvesti, SRP ne obstaja.

In kaj je torej pogoj za takšno poroko v našem primeru? Unija katerihkoli treh A_i mora vsebovati vsaj tri elemente.

(V primeru 1 je A_1 ={ f_1, f_2 }, A_2 ={ f_1, f_2 } in A_3 = { f_3, f_1 }. V uniji množic A_1, A_2 in A_3 so trije fantje, kar zadostuje, saj imamo tri dekleta.
Podoben razmislek v primeru 2 pove, da sta v uniji A_1, A_2 in A_3 samo dva fanta, dekleta pa so tri in zato poroke ne moremo izvesti.)

Hallov poročni izrek:

Naj bodo $A_1, A_2, ..., A_n$ neprazne podmnožice končne množice X. Zaporedje SRP obstaja natanko tedaj, ko vsaka unija katerihkoli m množic vsebuje vsaj m elementov. $(1 \leq m \leq n)$

Opomba: Če unija katerihkoli m množic vsebuje manj kot m elementov, potem teh množic ne moremo predstaviti z različnimi predstavniki (SRP ne obstaja).

Opomba: Izkaže se, da je ta pogoj tudi zadosten.

Dokaz:

Dokazujemo z indukcijo po n.
Za n=1 ni kaj dokazovati.
Predpostavimo, da je trditev drži za števila manjša od n in dokažimo za n.
Najprej spoznajmo nov pojem:
Definicija: Množici l množic A_i ($1 \leq l \leq n-1$) pravimo KRITIČNA DRUŽINA , če ima unija teh l množic moč natanko l.

Ločimo dva primera:

1. *Ni kritične družine:*
Izberimo poljuben $x \in A_n$ in ga odstranimo iz množice X.
Označimo $\grave{A}_i = A_i \setminus x$. Tako dobimo $\grave{A}_1,\ \grave{A}_2,\ ..., \grave{A}_{n-1}$.
Po indukcijski predpostavki SRP obstaja: $x_1, x_2, ...,\ x_{n-1}$ (za $\grave{A}_1,\ \grave{A}_2,\ ..., \grave{A}_{n-1}$).
Ko dodamo $x \in A_n$, ki je gotovo različen od $x_1,\ x_2, ...,\ x_{n-1}$, dobimo SRP za celotno množico X ($x_1,\ x_2, ...,\ x_{n-1}, x = x_n$).

2. $\exists$ *kritična družina:*
Naj bo $\{\ A_1,\ A_2,\ ...,\ A_l\ \}$ kritična družina. Po definiciji kritične družine velja, da ima njena unija moč l.(Unijo množic A_i, $1 \leq i \leq l$, označimo z $\widetilde{X}$, $|\ \widetilde{X}\ | =$ l.)
Ker je l manjši kot n, po indukcijski predpostavki obstaja SRP za $A_1, ..., A_l$, naj bo to $x_1, ..., x_l,\ x_i \in A_i, \quad 1 \leq i \leq l$
Poglejmo si preostanek množic $A_{l+1}, ..., A_n$. Vzamimo m teh množic. Unija $A_1, ..., A_l$ in teh m množic vsebuje vsaj l+m elementov. (natanko l iz kritične družine in vsaj m v preostanku, saj so množice A_i neprazne).
Z drugimi besedami, za $A_{l+1} \backslash \widetilde{X}, ..., A_n \backslash \widetilde{X}$ je izpolnjen pogoj Hallovega izreka (unija vsebuje vsaj m elementov), zato SRP zanje obstaja (indukcijska predpostavka). Dobljenemu sistemu dodamo še $x_1, ...x_l$ za $A_1, ..., A_l$ in dobimo SRP za celotno množico X. $\heartsuit$