Seminar pri predmetu Kombinatorika

Lidija Cigula

Maj, 2004

6.2 Konzervativni grafi

Do sedaj smo se ukvarjali samo z neusmerjenimi grafi.
Neusmerjen graf $G = (V, E)$, kjer je V neprazna množica točk in E je množica neurejenih parov točk iz množice V, torej E je množica povezav.
USMERJENI GRAF ALI DIGRAF $D = (V, A)$, kjer je V neprazna množica točk in A je množica UREJENIH parov točk iz množice V. Z drugimi besedami, D je graf, v katerem ima vsaka povezava svojo smer, ki jo običajno označimo s puščico. Urejene povezave imenujemo LOKI.
Če pogledamo označevanje magičnih grafov, je oznaka, ki je na povezavi, prišteta v obeh točkah, ki ju ta povezava povezuje. Pri označevanju usmerjenih grafov pa je oznaka prišteta ali odšteta, kar je odvisno od smeri puščice. Če je puščica obrnjena v točko, potem oznako prištejemo, če pa gre puščica iz točke, pa oznako odštejemo.
Kirchhoff se je ukvarjal s pretoki vode skozi sistem pip oziroma pretoki elektrike skozi omrežje. Zato se naslednja lastnost imenuje po njem.
KIRCHHOFFOV ZAKON: V usmerjeni označitvi grafov je vsota oznak na lokih, ki so usmerjeni v točko, enaka vsoti oznak na lokih, ki so usmerjeni iz točke.

KONZERVATIVNI GRAF je graf s q povezavami, ki je lahko usmerjen in označen s števili 1,2,...,q, tako da Kirchhoffov zakon velja v vsaki točki.
Z drugimi besedami lahko rečemo, da je usmerjena vsota v točki enaka nič.
Povezave grafa na sliki 1 so lahko usmerjene in označene s števili 1,2,3,...,9, tako da je vsota oznak, ki so usmerjene v točko, enaka vsoti oznak, ki izhajajo iz točke.
Neusmerjen graf na sliki 1 je konzervativen, kar prikazuje usmerjen in označen graf na sliki 2.
Na primer, če so puščice na sliki 2 pipe in števila na usmerjenih povezavah predstavljajo koliko litrov vode preteče na sekundo, bi voda v resnici tekla skozi ta sistem pip, saj Kirchhoffov zakon velja v vsaki točki tega grafa.

Graf dodekaedra je konzervativen. Na sliki 3 vidimo označitev , ki jo je našel Sharon Cobaniss s pomočjo računalnika.

Izrek 1 *Če lahko graf G razstavimo na dva Hamiltonova cikla, tedaj je graf G konzervativen.*

Dokaz. Predpostavimo, da je G graf z n točkami. Izberimo točko a in potujmo po povezavah enega Hamiltonovega cikla, pri tem pa v smeri potovanja usmerimo povezave. Označimo povezave po vrsti od a dalje s števili: $1, 3, 5, ..., 2n - 1$. Glej sliko 4 za primer, ko je n=7. Na enak način naredimo pot po drugem Hamiltonovem ciklu, za razliko od prej pa sedaj označimo

povezave po vrsti s števili: $2n, 2n-2, 2n-4, ..., 4, 2$.
V vsaki točki, razen a, velja naslednje: vsota števil na povezavah pri posamezni točki na prvem Hamiltonovem ciklu je -2, na drugem Hamiltonovem ciklu pa je vsota števil pri isti točki enaka $+2$. To pomeni, da je usmerjena vsota pri vseh točkah, razen a, enaka 0.
Preverimo še usmerjeno vsoto pri točki a. Povezavi, ki sta usmerjeni v točko, sta označeni s števili $2n-1$ in 2. Povezavi, ki gresta iz točke, pa sta označeni s števili 1 in $2n$.
Tako smo preverili, da Kirchhoffov zakon velja v vsaki točki. $\square$

V dokazu izreka 1 smo preverili, da Kirchhoffov zakon velja v vsaki točki, ampak to v resnici sploh ni potrebno, saj imamo naslednji izrek.

Izrek 2 *Kirchhoffov globalni zakon o pretokih.*
Če je graf G označen in usmerjen tako, da Kirchhoffov zakon velja v vsaki točki grafa G, razen v točki a, tedaj Kirchhoffov zakon velja tudi v točki a.

Dokaz. Naj bo stopnja točke a enaka $h + f$, kjer so prihajajoče povezave v a označene s števili $c_1, c_2, ..., c_h$, izhajajoče pa s števili $b_1, b_2, ..., b_f$, ostale povezave v grafu so označene z d_i. Naj bo S množica točk grafa G brez točke a. Po predpostavki Kirchhoffov zakon velja v vsaki točki množice S. Zato za vsako točko iz S velja, da je njena usmerjena vsota enaka 0. Potem je vsota vseh vsot točk iz množice S enaka:
$d_1 - d_1 + d_2 - d_2 + ... + b_1 + b_2 + ... + b_f - c_1 - c_2 - ... - c_h = 0$.
Vsak d_i se pojavi dvakrat, enkrat kot vhodna in drugič kot izhodna povezava, tako da se vsi d_i odštejejo in ostane nam enakost:
$b_1 + b_2 + ... + b_f = c_1 + c_2 + ... + c_h$
Tako Kirchhoffov zakon velja tudi v točki a. $\square$

Tudi, če bi vsakemu številu na povezavah prišteli enako število, npr. število 100 prištejemo vsaki označitvi povezave grafa na sliki 4, bo Kirchhoffov zakon še vedno veljal v vsaki točki. Če pa to poskusimo narediti na grafu, ki je na sliki 2, pa to ne velja.
Ta razmislek nas vodi k naslednji definiciji:
Graf G s q povezavami imenujemo STROGO KONZERVATIVNI GRAF, če za vsako število h obstaja usmerjena označitev povezav grafa G s števili $h+1, h+2, ..., h+q$, tako da Kirchhoffov zakon velja v vsaki točki.

Tako je graf na sliki 4 strogo konzervativen. Medtem ko za graf na sliki 2 tega zaenkrat še ne vemo.

Izrek 3 *Če graf G lahko razstavimo v dva podgrafa H_1 in H_2 in je H_1 konzervativen, H_2 pa strogo konzervativen, tedaj je G konzervativen graf.*
Še več, če sta podgrafa H_1 in H_2 oba strogo konzervativna, tedaj je G strogo konzervativen graf.

Dokaz. Naj bo q_1 število povezav v grafu H_1 in q_2 število povezav v grafu H_2, takih, da je število povezav v grafu G enako $q_1 + q_2$.
Vzemimo konzervativno označitev grafa H_1, označimo povezave s števili $1, 2, 3, ..., q_1$ in strogo konzervativno označitev grafa H_2, kjer označimo povezave s števili $q_1 + 1, q_1 + 2, ..., q_1 + q_2$. V obeh teh označitvah velja Kirchhoffov zakon. Tako je usmerjena vsota vsake točke iz grafa G enaka nič. In tako smo dobili konzervativno označitev grafa G in smo dokazali prvi del izreka.
Sedaj predpostavimo, da sta H_1 in H_2 strogo konzervativna in naj bo h dano število. Vzemimo strogo konzervativno označitev podgrafa H_1, tako da uporabimo števila $h + 1, h + 2, ..., h + q_1$ in strogo konzervativno označitev podgrafa H_2, pri čemer uporabimo števila $h+q_1+1, h+q_1+2, ..., h+q_1+q_2$. Spet je usmerjena vsota v vsaki točki enaka nič in dobili smo strogo konzervativno označitev grafa G s števili $h + 1, h + 2, ..., h + q_1 + q_2$. Tako je graf G strogo konzervativen. □

Primer: graf iz izreka 1, slika 4, je pravzaprav strogo konzervativen. Konzervativna označitev tega grafa obstaja. Ta graf ima dve povezavi usmerjeni v vsako točko in dve povezavi usmerjeni iz vsake točke. Od tod sledi, če dodamo konstanto h vsaki oznaki na povezavi, to ne vpliva na usmerjeno vsoto v vsaki točki.
Sedaj lahko izrek 1 zapišemo drugače:

Izrek 1* *Če graf G lahko razstavimo v dva Hamiltonova cikla, tedaj je G strogo konzervativen graf.*

Izrek 4 *Naj bo G graf z n točkami, kjer je n liho število, in G lahko razstavimo v tri Hamiltonove cikle. Tedaj je G strogo konzervativen graf.*

Dokaz. Naj bodo H_1,H_2 in H_3 Hamiltonovi cikli. Povezave vsakega Hamiltonovega cikla usmerimo glede na smer potovanja. Glej sliki 5 in 6.
Izberimo točko a in označimo povezave H_3, tako da začnemo pri a in po vrsti označujemo s števili:
(H_3) ${}^a 3n, 3n - 6, ..., 15, 9, 3, {}^b 3n - 3, ..., 18, 12, 6.$
Povezave H_1 označimo s števili, začnemo pri a:
(H_1) ${}^a 1, 4, 7, ..., 3n - 5, 3n - 2.$
Za H_2 pa ne začnemo označevati pri točki a. Začnimo pri točki b, ki leži med povezavo označeno s 3 in $3n - 3$ v H_3. S števili:
(H_2) $..., 3n - 1, {}^b 2, 5, 8, ...$
Tedaj je v vsaki točki, razen a in b, usmerjena vsota v ciklu H_3 enaka -6, v ciklih H_1 in H_2 pa je vsota enaka 3. Tako Kirchhoffov zakon velja v vsaki točki grafa G, razen v točkah a in b.
Poglejmo vsoto v točki a. V točki a imamo prihajajoča števila $6, 3n - 2$ in t, za nek t, njihova vsota pa je enaka $3n + t + 4$. Števila, ki grejo iz točke pa so $3n, 1$ in $t + 3$, njihova vsota pa je enaka $3n + t + 4$. Tako Kirchhoffov zakon velja v točki a.

Po izreku 2 Kirchhoffov zakon mora veljati tudi v točki b. Seveda bi lahko tudi to preverili direktno.
V vsaki točki so tri puščice obrnjene v točko in tri obrnjene iz točke. Konstanto h lahko dodamo vsakemu številu in Kirchhoffov zakon bo še vedno veljal. Zato je graf G strogo konzervativen. $\square$

Izrek 5 *Če je n liho in $n \geq 5$, tedaj je K_n konzervativen.*

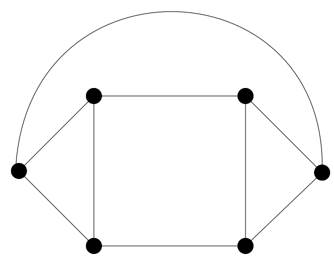
Dokaz. Če je n liho število, lahko K_n razbijemo v $\frac{n-1}{2}$ Hamiltonovih ciklov po izreku 2.3.1. Število $\frac{n-1}{2}$ lahko zapišemo kot $2 + 2 + 2 + ... + 2$ ali $2 + 2 + 2 + ... + 3$. Po izreku 4 je unija treh Hamiltonovih ciklov strogo konzervativna. Po izreku 1* je unija dveh Hamiltonovih ciklov strogo konzervativna. Tako lahko razstavimo K_n, za liho število n, $n \geq 5$, v nekaj strogo konzervativnih podgrafov. Če se nekajkrat sklicujemo na izrek 3, se izkaže, da je K_n konzervativen za lih n, pri čemer je $n \geq 5$. $\square$

Izrek 6 *Za $n \geq 3$ je kolo W_n konzervativen graf.*

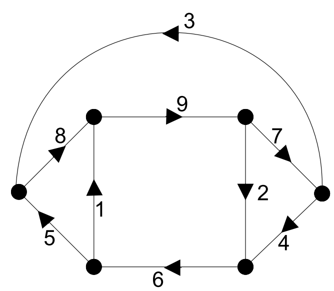
Dokaz. Če je n liho število, usmerimo povezave na ciklu kolesa v smeri urinega kazalca. Izberimo označitev za cikel in povezave s centralno točko, kot je prikazano na sliki 9, kjer krivulja na vrhu predstavlja cikel kolesa. Glej sliko 8 za primer, ko je $n = 9$. Lahko preverimo, da se vsako število od 1 do $2n$ pojavi natanko enkrat. To nam pomaga pri opazovanju, da so vsa števila na ciklu liha, razen števil $2n$ in 2, in da so vsa števila na povezavah s centralno točko soda, razen števil 1 in n. Sedaj lahko preverimo, da Kirchhoffov zakon velja v vsaki točki stopnje 3. Tedaj po izreku 2, Kirchhoffov zakon velja tudi v centralni točki kolesa, ki je stopnje n.
Če je n sodo število, pa si poglejmo označitev, ki je prikazana na sliki 10. Glej sliko 7 za primer, ko je $n = 8$. Povezava, ki je označena s številom 2 ima drugačno smer kot ostale povezave. Znova lahko preverimo, da se vsa števila od 1 do $2n$ pojavijo natanko enkrat in da Kirchhoffov zakon velja v vsaki točki.
Dokazali smo, da je W_n konzervativen za $n \geq 3$. $\square$

Izrek 7 *Če je n sodo število in $n \geq 4$, potem je K_n konzervativen graf.*

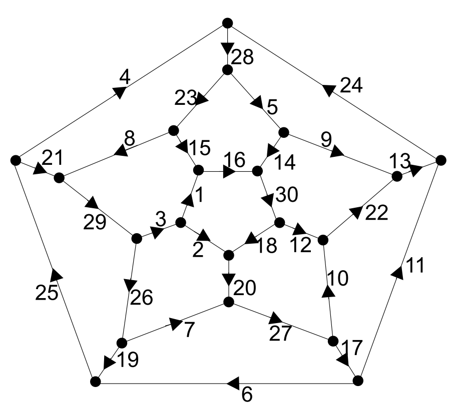
Dokaz. Osnovni dokaz deluje za $n \neq 6$. Če pa je $n = 6$, pa na sliki 11 vidimo, da je K_6 konzervativen.
K_n zapišimo kot unijo W_n in $K_{n-1} - C_{n-1}$. ($K_{n-1} - C_{n-1}$ pomeni K_{n-1} brez povezav Hamiltonovega cikla.) Po izreku 6 je W_n konzervativen. Po izrekih 1*, 3 in 4 pa je $K_{n-1} - C_{n-1}$ strogo konzervativen. In zato po izreku 3 sledi, da je K_n konzervativen, če je n sodo in $n \geq 4$. $\square$



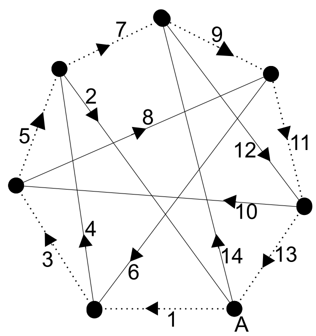
Slika 1: Graf 1



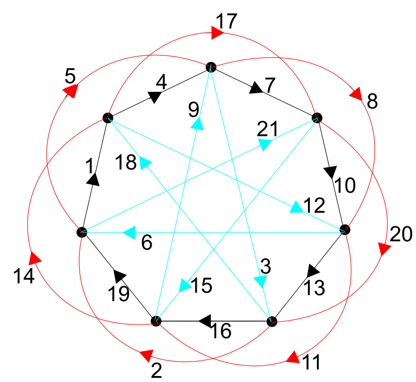
Slika 2: Konzervativna označitev grafa 1



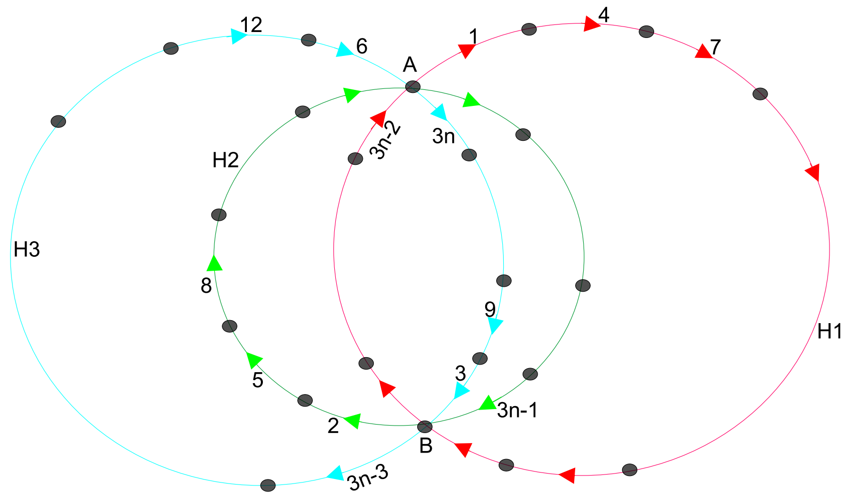
Slika 3: Dodekaeder



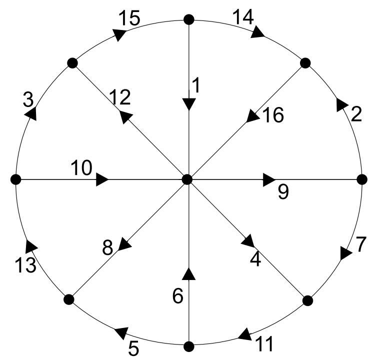
Slika 4: Označitev dveh Hamiltonovih ciklov



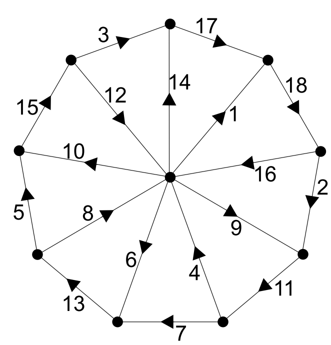
Slika 5: Označitev treh Hamiltonovih ciklov



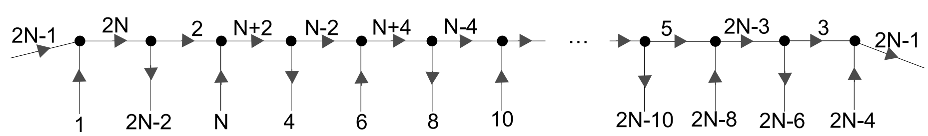
Slika 6: Označitev treh Hamiltonovih ciklov-posplošeno



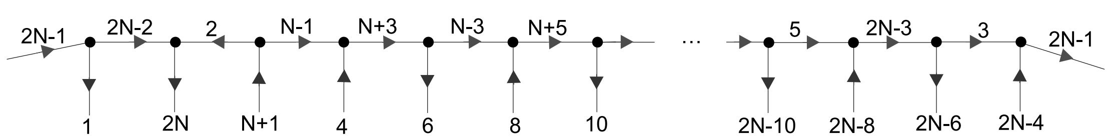
Slika 7: Označitev W_8



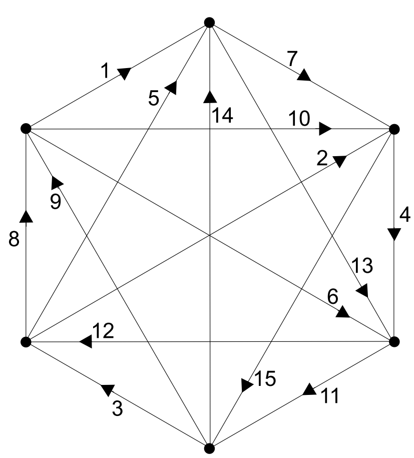
Slika 8: Označitev W_9



Slika 9: Označevanje lihih koles



Slika 10: Označevanje sodih koles



Slika 11: Konzervativna označitev K_6