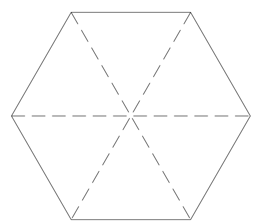
SEMINARSKA NALOGA

Gobec Metka
Paj Tjaša

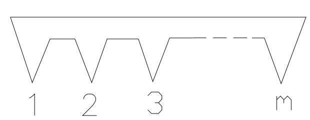
15. april 2003

KAKO ZASTRAŽITI MUZEJ?

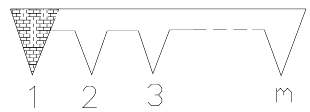
Začetnik problema je Victor Klee (1973).
Problem: Radi bi zavarovali muzej tako, da je v vsakem trenutku zastražena vsaka točka muzeja. Stražarji so postavljeni na fiksna mesta, lahko pa se obračajo. Koliko stražarjev potrebujemo?
Stene muzeja si predstavljamo kot večkotnik z n stranicami. Če je večkotnik konveksen, je seveda dovolj en sam stražar, ki je lahko postavljen v katerokoli točko muzeja.



Primer 1: Struktura muzeja z $n = 3m$ stenami.



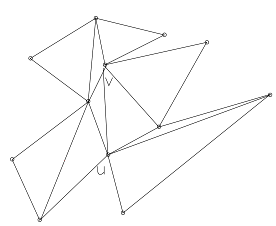
Zlahka opazimo, da takšna oblika muzeja z n stenami zahteva vsaj $m = \frac{n}{3}$ stražarjev. Točko 1 lahko stražar opazuje s kateregakoli fiksnega mesta v trikotniku z vrhom v točki 1.



Podobno ugotovimo za vse ostale točke $(2, 3, ..., m)$. Če so ti trikotniki disjunktni, potrebujemo torej vsaj m stražarjev. Toliko stražarjev pa je tudi dovolj, da zavarujemo muzej, če jih postavimo v zgornji del trikotnika (npr. na zgornjo stranico). Če odstranimo eno ali dve steni na koncu, ugotovimo, da potrebujemo $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ stražarjev.

IZREK: (*Muzejski izrek*)
Za straženje kakršnegakoli muzeja z n stenami zadošča $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ stražarjev.

DOKAZ: (Steve Fisk)
Dan je muzej z n stenami. Najprej narišemo $(n-3)$ nesekajočih se diagonal med stičišči sten, da postane notranjost sestavljena iz samih trikotnikov.



To sliko si sedaj predstavljamo kot ravninski graf (G) s stičišči kot točkami grafa in stranicami ter diagonalami kot povezavami.

Trditev:
Obstaja $3-barvanje$ ravninskega grafa (G) (iz nasega dokaza).
Dokaz trditve:(indukcija po n)
Baza indukcije: $n = 3$. Dobimo trikotnik. Očitno.
Korak indukcije: $(n-1) \Rightarrow n; n > 3$.
Izberemo katerikoli dve točki u in v, ki sta povezani z diagonalo. Ta diagonala razdeli graf na dva manjša grafa (sestavljena iz trikotnikov), ki oba vsebujeta povezavo uv. Po indukcijski predpostavki za vsakega obstaja $3-barvanje$. Izberemo barvo 1 za u in barvo 2 za v. če sedaj združimo oba grafa vidimo, da za prvotni graf (G) obstaja $3-barvanje$. □

Nadaljevanje dokaza izreka:
Ker je n točk, z vsaj eno od barv pobarvamo največ $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ točk. Tja postavimo stražarje. Ker ima vsak trikotnik eno oglišče te barve, je tako zavarovan cel muzej. □

Primer 2: Muzej ima obliko spodaj narisanega lika. Kam naj postavimo stražarje, da bo njihovo število čim manjše in da bo zastražen cel muzej?
a) Glej $sliko$1 na koncu poglavja!
b) Glej $sliko$2 na koncu poglavja!

V zgornjem dokazu in primerih smo uporabili triangulacijo večkotnika. Naslednje vprašanje, ki se nam zastavi je: Ali triangulacija vedno obstaja? Odgovor se glasi: DA - v ravnini (dokaz sledi!) in NE - v prostoru!

DEFINIcIJA:
Točka A (v n - kotniku) je **konveksna**, če meri notranji kot z vrhom v A manj kot 180°.

Opomba:
Vsak večkotnik ima vsaj tri konveksne točke.

Dokaz opombe:
Recimo nasprotno: v poljubnem n - kotniku sta konveksni natanko dve točki (kot pri eni točki označimo z α, kot pri drugi konveksni točki pa z β). Vsota notranjih kotov v tem n - kotniku je torej več kot $(n-2)180^\circ + \alpha + \beta$, kar pa je v protislovju z dejstvom, da meri vsota notranjih kotov v n - kotniku

natanko $(n-2)180^\circ$. *Dokazali smo, da ima poljuben* n *- kotnik res vsaj tri konveksne točke.* □

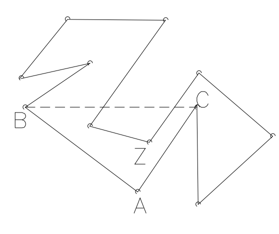
Trditev:
Triangulacija poljubnega ravninskega grafa vedno obstaja.

Dokaz:
Indukcija po n (po številu točk grafa).

Baza indukcije: $n = 3$. Graf je trikotnik. Triangulacija je očitna.

Korak indukcije: $(n-1) \Rightarrow n; n > 3$.

Indukcijska predpostavka: obstaja triangulacija 3 - kotnika, 4 - kotnika,..., $(n-1)$ - kotnika.
Najti moramo diagonalo, ki bo razdelila večkotnik (ravninski graf na n točkah) na dva manjša, ki ju nato zlepimo (podobno kot v dokazu izreka). V ta namen v n - kotniku poiščemo konveksno točko A in označimo njeni sosednji točki z B in C. Če daljica BC v celoti leži v notranjosti n - kotnika, potem je BC iskana diagonala. V nasprotnem primeru sklepamo, da trikotnik ABC vsebuje vsaj še eno oglišče n - kotnika.

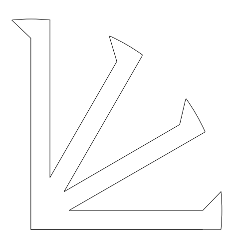


Daljico BC vzporedno potegnemo proti oglišču A, dokler se ne dotakne zadnjega oglišča n - kotnika. To oglišče označimo z črko Z. Sedaj je daljica AZ iskana diagonala, ki razdeli n - kotnik na dva manjša dela. Uporabimo še indukcijsko predpostavko, ki pravi, da za manjša dela n - kotnika triangulacija obstaja. Trditev je tako dokazana. $\square$

Variante tega problema:

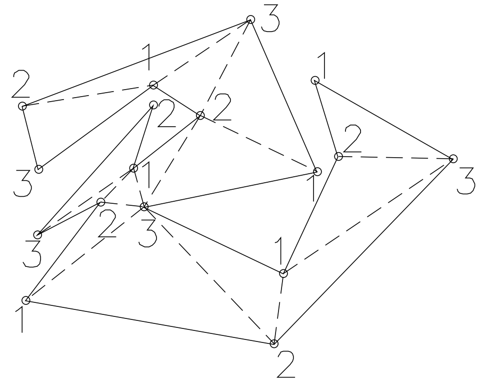
- Stražimo samo stene (na katerih visijo slike).
- Stražarje postavimo samo v kote muzeja.
- Obstaja pa tudi verzija, ki še ni dokončno razrešena:

  Predpostavimo, da se stražar pomika vzdolž ene stene muzeja in straži vse, kar je mogoče videti iz vsake točke te stene. Koliko stražarjev potrebujemo? Gottfried Toussaint je skonstruiral primer muzeja naslednje oblike:



  Predvideva se, da je za ta muzej dovolj $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ stražarjev, a dokaza še ni!

Slika 1: Stražarje postavimo v točke označene s 3!



Slika 2: Stražarje postavimo v katerokoli točko označeno z istim številom!