OBERWOLFACHOV PROBLEM

Tina Obreht

april, 2004

1 OBERWOLFACHOV PROBLEM

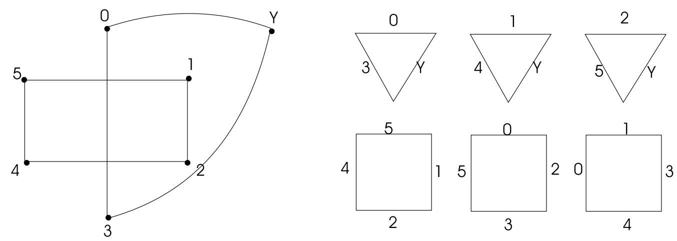
Oberwolfachov problem je zastavljen takole:
Na sestanku je $2n+1$ udeležencev. Zanima nas, kako se lahko ti ljudje $n-krat$ razporedijo pri večerjah za okroglimi mizami tako, da bo posameznik vsakič sedel z drugima dvema sosedoma. Število miz in število sedežev je lahko različno.
V Oberwolfachu, v Nemčiji, kjer matematični inštitut in imajo vsak teden sestanke z različnimi matematičnimi temami, so dejansko poskusili tako sedeti (večina miz ima 6 mest). Veliko primerov tega problema ostaja kljub temu še nerešenih.
Oberwolfachov problem je poimenoval Gerhard Ringel.

Podan je torej takole:
$2n + 1 = t_1 + t_2 + ... + t_s$,
kjer je s število okroglih miz: $T_1, T_2, ..., T_s$ in velja, da za mizo T_i sedi t_i ljudi.

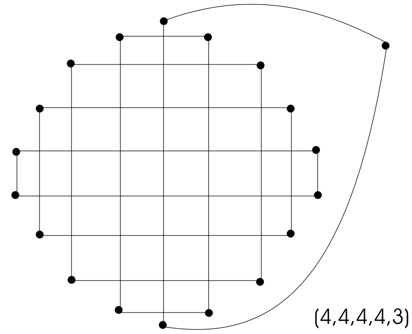
Prevedimo Oberwolfachov problem v jezik teorije grafov.
Podan imamo graf T z $2n + 1$ točkami, ki je regularen stopnje 2. Vemo, da je to graf, ki je sestavljen iz enega ali več ciklov različnih velikosti in skrči polni graf K_{2n+1} v n podgrafov izomorfnih k T. Če je naš problem podan tako, da vsi ljudje sedijo za eno mizo, potem se prevod v teorijo grafov glasi, da K_{2n+1} premore različne Hamiltonove cikle.

Poglejmo si nekaj rešitev tega problema. Vsaka je označena s simbolom $(t_1, t_2, ..., t_s)$, kjer je s število miz in t_i število sedežev pri mizi T_i.
Posplošimo rešitvi iz slike 1 in slike 2.
Če imamo k miz s štirimi sedeži in eno mizo s tremi sedeži, je prva postavitev taka:
(T_1) $(0, 2k + 1, y)$
(T_2) $(k, k + 1, 3k + 1, 3k + 2)$
(T_3) $(k - 1, k + 2, 3k, 3k + 3)$
$(...)$ $(..., ..., ..., ...)$

(T_{k+1}) $(1, 2k, 2k+2, 4k+1)$
Naslednji sedežni red je določen s spremembo indeksov za eno enoto. To pomeni, da prištejemo ena k vsakemu številu, y ostane y, in po dodajanju enote zamenjamo $4k+2$ z 0.



Slika 1: Primer rešitve Oberwolfachovega problema



Slika 2: Primer rešitve Oberwolfachovega problema

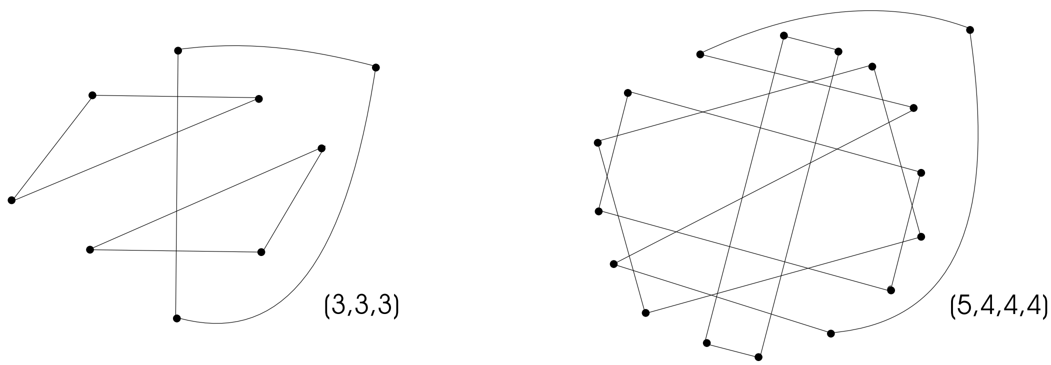
2 REGULARNI GRAFI

Spomnimo se, povezava e povezanega grafa je most, če je graf brez povezave e nepovezan.

Izrek 1 *Regularen graf sode stopnje nima mostu.*

Dokaz. Predpostavimo nasprotno. Imamo regularen graf G stopnje $2h$, ki ima most b. Potem ima graf $G-b$ dve komponenti in vsaka ima natanko eno točko lihe stopnje. To pa je nemogoče, saj vemo, da je število točk grafa, ki so lihe stopnje, sodo mnogo. Sledi: regularen graf G sode stopnje nima mostu. $\square$

Opomba: Graf, ki ima vse točke sode stopnje, nima mostu.



Slika 3: Primer rešitve Oberwolfachovega problema

Izrek 2 *3-regularen graf, ki vsebuje most, ni razstavljiv v tri 1-faktorje.*

Dokaz. Če bi tako razbitje grafa obstajalo, potem bi bil most vsebovan v natanko enem od treh 1-faktorjev. Odstranimo ravno ta 1-faktor, ki vsebuje most. Vsak od preostalih dveh 1-faktorjev vsebuje 1-faktor iz prve komponente skupaj z 1-faktorjem iz druge komponente. Ampak vsaka komponenta ima liho število točk in ne more predstavljati 1-faktorja. Sledi: tako razbitje grafa ne obstaja. □

Spomnimo se, da je snark 3-regularen graf s kromatičnim indeksom 4. To pomeni, da snark ni razstavljiv v tri 1-faktorje. Snark, ki ne vsebuje mostu, vedno premore 1-faktor.

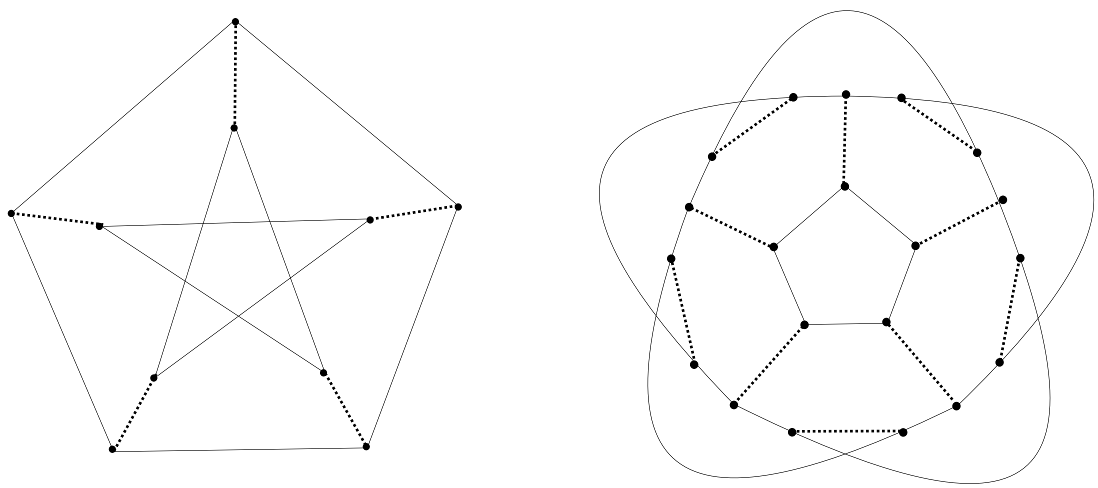
Izrek 3 *(Petersen) 3-regularen graf G, ki nima mostu, lahko razstavimo v 1-faktor in 2-faktor.*

Vemo, da je 2-faktor unija ciklov. Če so vsi cikli v zgoraj omenjeni razstavitvi enake dolžine, potem ima graf G razstavitev v tri 1-faktorje.
Petersenovega izreka ne bomo dokazovali.
Pove nam, da lahko vsak 3-regularen graf, ki ne vsebuje mostu, konstruiramo tako, da vzamemo neke cikle in povežemo vsako točko z drugo točko iz istega ali katerega drugega cikla (primer sta sliki 5 in 6). Z drugimi besedami lahko Petersenov izrek zapišemo: vsak 3-regularen graf, ki ne vsebuje mostu, premore 2-faktor.

Zanimiva uporaba Petersenovega izreka je dokaz sledečega.

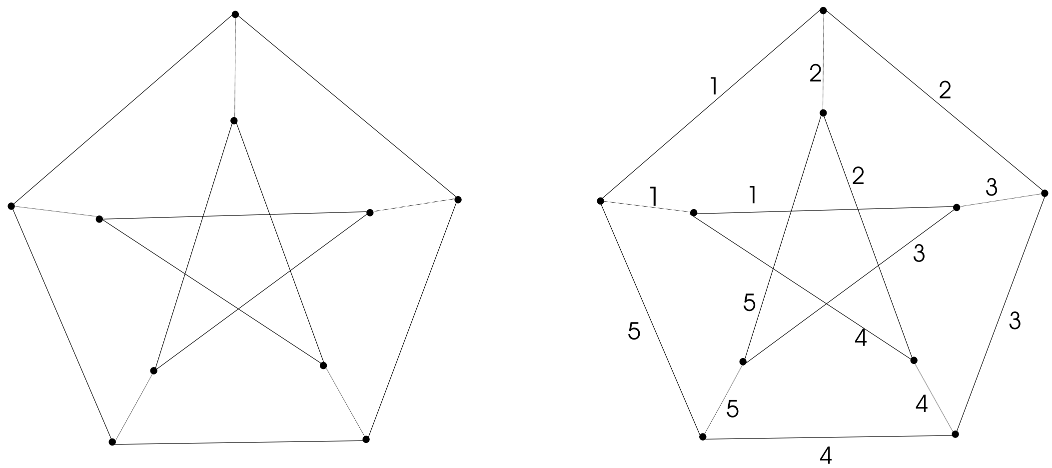
Izrek 4 *Vsak 3-regularen graf, ki ne vsebuje mostu, lahko razstavimo v poti dolžine tri.*

Dokaz. Naj bo G 3-regularen graf, ki nima mostu. Petersenov izrek pove, da lahko povezave pobarvamo rdeče in modro tako, da iz vsake točke gredo

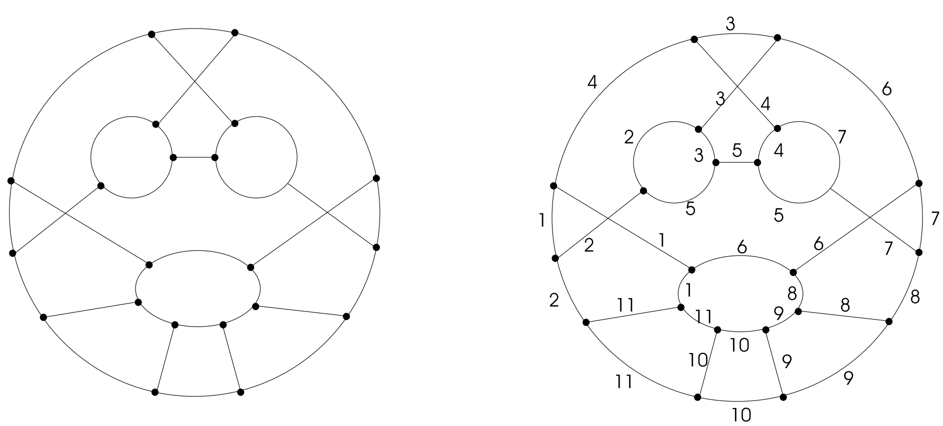


Slika 4: Razstavitev 3-regularnega grafa v 1-faktor in 2-faktor

ena modra in dve rdeči povezavi. Poglejmo si tole najprej na Petersenovem grafu (slika 5), nato pa še na primeru grafa, ki je narisan spodaj (slika 6).
1) Narišimo Petersenov graf. Vemo, da je razstavljiv v 1-faktor, ki ga pobarvajmo modro, in 2-faktor, katerega povezave naj bodo rdeče. Označimo modre povezave z 1, 2, ... v poljubnem vrstnem redu. Osredotočimo se sedaj na cikel sestavljen iz rdečih povezav. Potujmo po ciklu in oštevilčimo rdeče povezave z istimi števili, kot smo označili modre povezave, ki imajo začetek v točkah na ciklu. Če naredimo isto še na drugem ciklu, vidimo, da se vsako število pojavi na treh povezavah, ki formirajo pot P_3. S tem postopkom razstavimo Petersenov graf na poti dolžine tri.
2) Narišimo primer 3-regularnega grafa G na tak način, da bodo modre povezave predstavljale ravne, rdeče pa ukrivljene črte. Analogno kot v zgornjem primeru oštevilčimo modre in rdeče povezave in dobimo razčlenitev grafa G v podgrafe izomorfne k P_3. □



Slika 5: Razstavitev Petersenovega grafa v poti dolžine tri



Slika 6: Razstavitev grafa v poti dolžine tri