Orientacije in turnirji

Vesna Štern

1. junij 2005

Iz množice točk velikosti n lahko sestavimo n^2 urejenih parov elementov. Enostaven digraf dovoljuje zanke, vendar uporabi vsak urejen par največ enkrat kot povezavo. Tako obstaja n^2 urejenih parov, ki so ali pa niso predstavljeni kot povezave, pa tudi 2^{n^2} enostavnih digrafov iz množice točk $v_1, ..., v_n$. Včasih želimo zanke preprečiti.

Definicija 1.
Orientacija grafa G je digraf D, ki nastane iz grafa G z izbiro orientacije ($x \to y$ ali $y \to x$) za vsako povezavo $xy \in E(G)$.
Orientiran graf je orientacija enostavnega grafa.
Turnir je orientacija polnega grafa.

Z drugimi besedami:
Turnir je digraf, katerega temeljni graf je polni graf.

Primer 1.
Nekateri turnirji s tremi točkami (slika 1):

Slika 1:

Nekateri turnirji s štirimi točkami (slika 2):

Slika 2:

Orientiran graf je isto kot enostavni digraf brez zank. Kadar povezave grafov predstavljajo primerjave, ki naj bi obstajale med elementi, ki odgovarjajo točki, lahko zapišemo rezultate s primerjanjem $x \to y$, ko je x boljši kot y. Rezultat je orientacija grafa G. Število orientiranih grafov s točkami $v_1, ..., v_n$ je $3^{\binom{n}{2}}$, število turnirjev je $2^{\binom{n}{2}}$.

Primer 2.
Orientacije polnih grafov torej oblikujejo turnir. Taki digrafi so primerni za zapis zamagovalcev športnega turnirja, v katerem vsaka ekipa igra z vsemi drugimi. Predstavljamo si ligo n-ekip, kjer vsaka ekipa igra z vsako točno enkrat. Za vsak par u, v dodamo povezavo uv, če zmaga u, ali pa povezavo vu, če zmaga v. Na koncu sezone imamo orientacijo K_n. Rezultat ekipe je izhodna stopnja, ki je enaka številu zmag.

Zaporedje izhodnih stopenj turnirja je torej zaporedje njegovega rezultata. Izhodna stopnja določa vhodno stopnjo, saj je $d^+(v) + d^-(v) = n - 1$ za vsako točko v.

Turnir ima lahko več kot eno točko z maksimalno izhodno stopnjo, tako da ni nujno, da obstaja čisti zmagovalec - v spodnjem primeru (slika 3) ima vsaka točka izhodno in vhodno stopnjo 2. Težko je določiti zmagovalca, ko ima več ekip maksimalno število zmag. Čeprav ni potrebe po čistem zmagovalcu, najprej pokažemo, da mora vedno obstajati taka ekipa x, da (za vsako drugo ekipo) ali x premaga z ali x premaga neko ekipo, ki premaga ekipo z.

Slika 3:

Definicija 2.
V digrafu je <u>kralj</u> točka, iz katere je vsaka točka dosegljiva po poti dolžine največ 2.

Primer 3.

Slika 4:

Trditev 1.
Vsak turnir ima kralja.

Dokaz.
Naj bo x točka v turnirju T. Če x ni kralj, potem neka točka y ni dosegljiva iz x po poti dolžine največ 2. Iz tega sledi, da ni noben naslednik točke x predhodnik točke y. Ker je T orientacija, mora vsak naslednik točke x potemtakem biti naslednik točke y. Prav tako $y \to x$. Iz tega sledi $d^+(y) > d^+(x)$. Če y ni kralj, potem ponovimo dokaz, da lahko najdemo točko z s še večjo izhodno stopnjo. Ker je T dokončen, ne moremo večno dosegati točk uspešnejših višjih izhodnih stopenj. Postopek mora biti končen, konča pa se lahko le takrat, ko najdemo kralja.

Slika 5:

□

Dokazali smo, da je vsaka točka maksimalne izhodne stopnje v turnirju kralj.

Trditev 2.
Vsak turnir je Polhamiltonov.

Dokaz.
Z drugimi besedami povedano moramo dokazati, da lahko v vsakem turnirju najdemo Hamiltonovo pot. Trditev bomo dokazali s pomočjo matematične indukcije po številu točk v turnirju.
1. korak: Za turnir z dvema točkama (slika 6), izrek velja.

Slika 6:

indukcijski korak: Naj bo trditev dokazana za vse turnirje z n točkami. Dokažimo, da trditev velja tudi za turnirje z $n+1$ točkami.
Vzemimo turnir z $n+1$ točkami. Prvih n točk sestavlja manjši turnir, v katerem po indukcijski predpostavki obstaja Hamiltonova pot (slika 7).

Slika 7:

Točka $n+1$ je povezana z vsemi drumi točkami (saj imamo turnir) in pri tem imamo tri možnosti:
(1.) Imejmo povezavo $n+1 \rightarrow 1$ (slika 8). V tem primeru najdemo Hamiltonovo pot $n+1, 1, 2, ..., n-1, n$ in trditev je dokazana.

Slika 8:

(2.) Imejmo povezavo $n \rightarrow n+1$ (slika 9). Tudi v tem primeru najdemo Hamiltonovo pot $1, 2, ..., n-1, n, n+1$ in trditev je dokazana.

Slika 9:

(3.) Če ne velja nobena od možnosti (1.) in (2.), potem imamo povezavi $1 \rightarrow n+1$ in $n+1 \rightarrow n$. To pa pomeni, da na poti od 1 do n obstaja točka r, da velja $r \rightarrow n+1$ in $n+1 \rightarrow r+1$ (slika 10). V Hamiltonovi poti za n točk (slika7) povezavo $r \rightarrow r+1$ nadomestimo z povezavama $r \rightarrow n+1$ in $n+1 \rightarrow r+1$ in dobimo Hamiltonovo pot $1, 2, ..., r, n+1, r+1, ..., n-1, n$.

Slika 10:

$\square$