Seminar pri predmetu Kombinatorika

Sandra Brodnjak

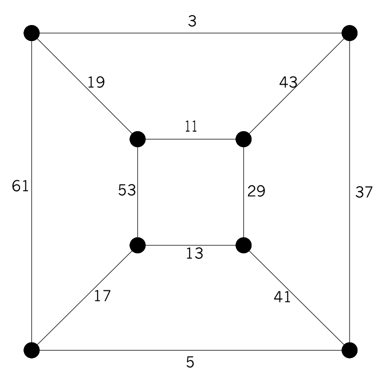
maj, 2004

6. Označevanje grafov

6.1 Magični grafi in gracilna drevesa

V tem poglavju bomo preučevali grafe in možnosti dodeljevanja števil vsaki točki ali vsaki povezavi ali oboje, vse to seveda pod določenimi pogoji. Označevanje grafov se razlikuje od barvanj grafov, saj bomo uporabljali strukturo in lastnosti števil, kot so ureditev in seštevanje, ki jih barve nimajo.

Najprej si oglejmo primer Stewartove kocke. Stewart je našel eno označitev povezav kocke. Glej sliko 1. V vsaki točki je vsota oznak na njenih incidenčnih povezavah enaka 83. Zraven tega še opazimo, da so povezave označene z različnimi praštevili.

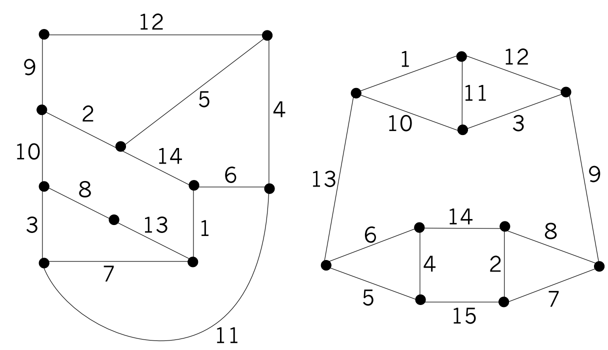


Slika 1: Stewartova kocka

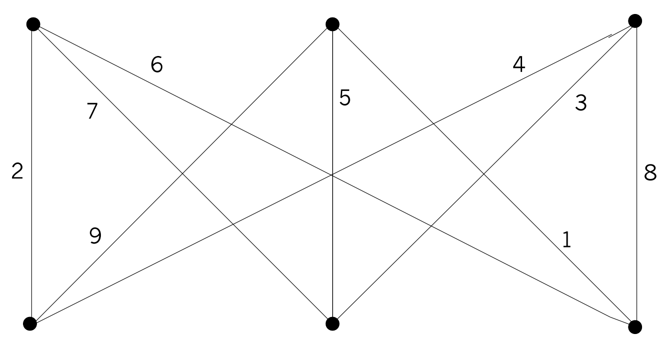
Naj bo graf G s q povezavami. Graf G je *magičen*, če lahko njegove povezave označimo s števili $1, 2, ..., q$, tako da je vsota oznak na vseh povezavah incidenčnih s točko neodvisna od izbire točke.

Na sliki 2 sta dva primera magičnih grafov.

Slika 3 prikazuje dvodelni graf $K_{3,3}$. Povezave so označene s števili $1, 2, ..., 9$, tako da je vsota oznak (na incidenčnih povezavah točke) pri vsaki točki enaka 15. To označevanje izhaja iz dobro znanega magičnega kvadrata (glej sliko 4). Naj bodo vrste v kvadratu rdeče točke in stolpci modre točke. Označimo povezave med rdečimi točkami in modrimi točkami s števili na kvadratu, ki je skupen vrstici in stolpcu magičnega kvadrata. Vemo, da je za vsak $n \geq 3$ obstaja $n \times n$ magičen kvadrat. Na sliki 5 vidimo primer 4×4 magičnega kvadrata. Označitev grafa $K_{4,4}$ na sliki 6 je magična.



Slika 2: magična grafa



Slika 3: $K_{3,3}$

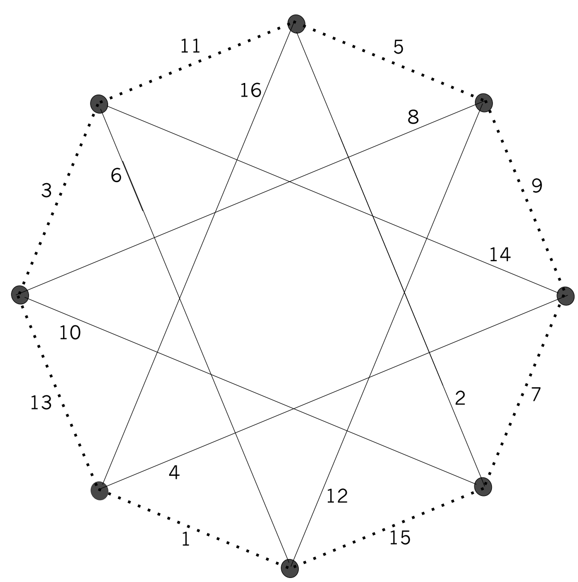
2	7	6
9	5	1
4	3	8

Slika 4: Magični kvadrat

3	11	14	6
8	5	9	12
10	2	7	15
13	16	4	1

Slika 5: Magični kvadrat

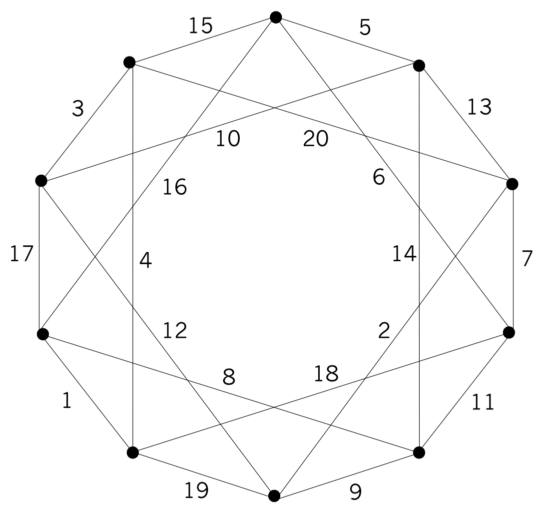
Izrek 1 *$K_{n,n}$ je magičen za $n > 2$.*



Slika 6: $K_{4,4}$

$K_{4,4}$ lahko razbijemo na dva Hamiltonova cikla. Označitev na povezavah enega Hamiltonovega cikla na sliki 6 je $15, 1, 13, 3, 11, 5, 9, 7$. Povezave na drugem Hamiltonovem ciklu pa so označene z: $2, 16, 4, 14, 6, 12, 8, 10$.

Graf na sliki 7 je še en primer dvodelnega grafa, ki ga lahko razbijemo na dva Hamiltonova cikla in je magičen. Strategija označevanja je ista kot pri sliki 6 in je v dokazu naslednjega izreka.



Slika 7: $K_{5,5}$

Izrek 2 *Naj bo G dvodelni graf, ki ga lahko razbijemo na dva Hamiltonova cikla. Tedaj je G magičen.*

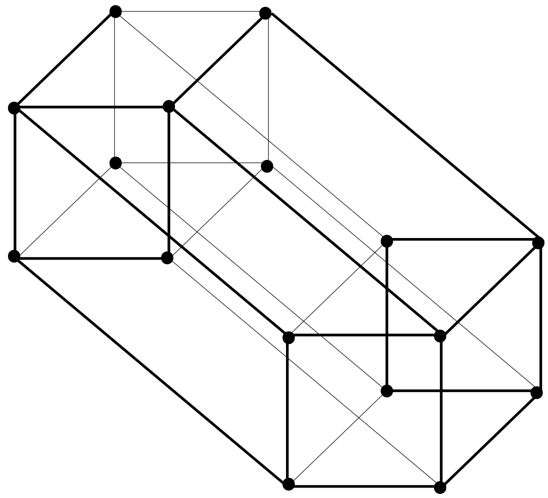
Dokaz. Ker je G dvodelni, je dolžina Hamiltonovega cikla soda, npr. $2n$. Tedaj je število povezav v G enako $q = 4n$. Kot v prejšnjih dveh primerih označimo en Hamiltonov cikel s sodimi števili in drugi Hamiltonov cikel z lihimi števili. Izberimo točko a in označimo povezave prvega Hamiltonovega cikla tako, da začnemo pri a, s števili:

$$4n-1, 1, 4n-3, 3, ..., 2n+1, 2n-1.$$

Sedaj označimo povezave drugega Hamiltonovega cikla, spet začnemo pri a, s števili:

$$2, 4n, 4, 4n-2, ..., 2n, 2n+2.$$

Ker je G dvodelni, lahko točke pobarvamo z rdečo in modro barvo, tako da nobeni dve povezani točki nista iste barve. Če je a modra, tedaj je vsota liho oštevilčenih povezav pri vseh modrih točkah, razen a, enaka $4n-2$. To lahko preverimo, tako da pogledamo vrstice zgornjih lihih števil. Vsota sodo oštevilčenih povezav pri modrih točkah, razen v a, je $4n+4$. Direktno preverimo,da je vsota vseh povezav pri a $8n+2$. Od tod sledi, da je vsota vseh povezav pri katerikoli modri točki enaka $8n+2$. Vsota liho oštevilčenih povezav pri vsaki rdeči točki je enaka $4n$. Vsota sodo oštevilčenih povezav pri vsaki rdeči točki je $4n+2$. Zato je vsota vseh povezav pri katerikoli rdeči točki enaka $8n+2$. Torej smo dokazali, da je G magičen. □



Slika 8: 4-kocka

Na sliki 8 vidimo graf 4-kocke. Razbijemo ga lahko na dva Hamiltonova cikla in je dvodelni, zato je po izreku 2 magičen.
Na sliki 9 imamo primer grafa, ki ga lahko razbijemo na dva Hamiltonova cikla. Ampak ta graf ni dvodelni, tako da nam metoda označevanja iz izreka 2 nič ne pomaga. Označevanje na sliki 9 je narejeno na "ad hoc" način, ki pa ga ne bomo spoznali. Lahko bi pokazali, da K_n ni magičen, če je n večkratnik števila 4. Znano pa je, da za vsako preostalo število $n \geq 6$ velja, da je K_n magičen. Slika 10 nam kaže magično označitev grafa K_7.

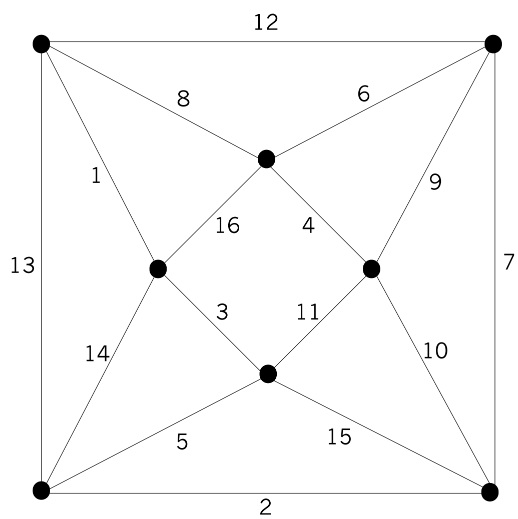
Izrek 3 *Če lahko graf G razbijemo na dva magična vpeta podgrafa G_1 in G_2, kjer je G_2 regularen, tedaj je G magičen.*

Dokaz. Z q_1 in q_2 označimo število povezav G_1 in G_2. Preučimo magično označevanje G_1 in magično označevanje G_2. Vsaki označitvi G_2 dodajmo q_1. Ker je G_2 regularen, smo vsaki točki dodali isti znesek. Sedaj imamo povezave grafa G označene s števili: $1, 2, ..., q_1, q_1+1, ..., q_1+q_2$ in vsota vseh oznak na povezavah pri vsaki točki je enaka. Zato je G magičen. □

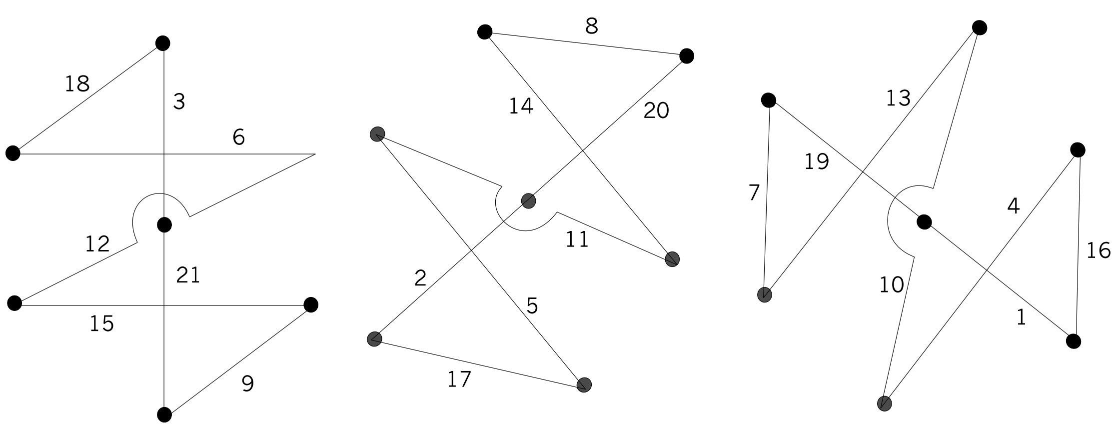
Na sliki 11 so prikazani primeri grafov, katerih povezave so označene s števili: $1, 2, ..., q$, tako da je vsota oznak na poljubni točki različna od vsote oznak na poljubni drugi točki. Torej nobeni dve različni točki nimata iste vsote. Take grafe bomo imenovali *antimagični grafi*.

Domneva 4 *Vsak povezan graf različen od K_2 je antimagičen.*

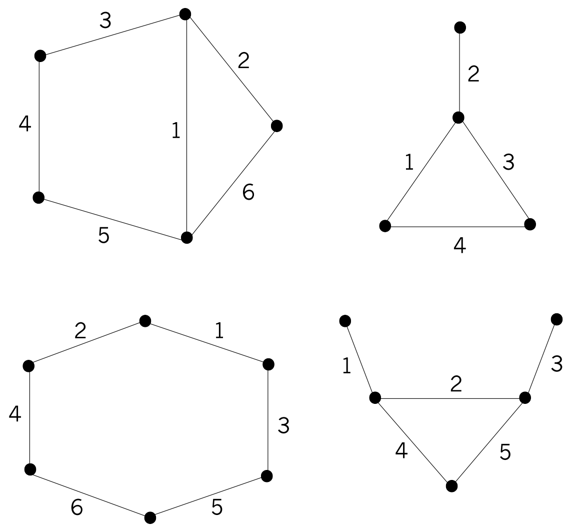
Tudi, če bi se posvetili samo drevesom, ne bi mogli zanesljivo trditi, da so vsa, razen K_2, antimagična.



Slika 9: Magični graf

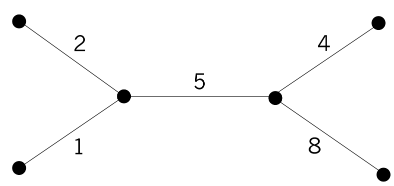


Slika 10: K_7



Slika 11: Antimagični grafi

Domneva 5 *Vsako drevo različno od K_2 je antimagično.*

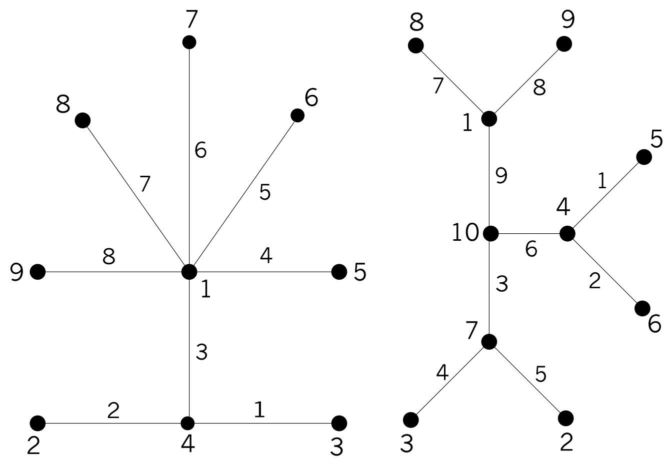


Slika 12: Označeno drevo

Slika 12 nam prikazuje označeno drevo. Drevo ima 6 točk, tako da imamo $\binom{6}{2}$ parov točk in vsak par točk je povezan z natanko eno potjo. Če dodamo števila na povezave na vsako od teh poti, tedaj se vsako število od 1 do $\binom{6}{2}$ pojavi kot natanko ena od teh vsot. Za katere vrednosti n-ja je mogoče tako označevanje drevesa na n točkah? John Leech je dal odgovor za $n \leq 6$, vključno s primerom, ki je prikazan na sliki 12 in dejstvo, da je to nemogoče za n=5. Še vedno pa ni znano ali je to mogoče za $n > 6$.

Če ima drevo n točk, tedaj ima $n-1$ povezav. Točke označimo s števili $1, 2, ..., n$. Oznake na poljubni povezavi so enake absolutni razliki med oznakama točk, ki ju povezava povezuje. Če so oznake na povezavah števila $1, 2, ..., n-1$, tedaj rečemo, da je drevo *gracilno*.

Slika 13 nam prikazuje gracilna drevesa. Gerhard Ringel je domneval, da so vsa drevesa gracilna. Ta ugotovitev je bila dokazana za različne vrste dreves, a ni bila dokazana v splošnem.



Slika 13: Gracilna drevesa