O prijateljih in politikih

Sandi Klavžar

12. maj 2003

1 Izrek

Na tem seminarju bomo dokazali naslednji rezultat.

Izrek 1 *Naj bo G graf z $n \geq 3$ točkami. Če imata poljubni dve točki v G natanko enega skupnega soseda, G vsebuje točko stopnje $n-1$.*

Izrek lahko interpretiramo takole. Recimo, da imamo skupino $n \geq 3$ ljudi in predpostavimo, da je relacija "prijatelj" simetrična. Tedaj velja: če imata vsaki dve osebi natanko enega skupnega prijatelja, obstaja oseba ("politik"), ki je prijatelj z vsemi. Ta interpretacija izreka poraja tudi njegovo ime: "izrek o prijateljstvu."

Preden se lotimo dokaza, opomnimo, da se takoj lahko prepričamo, da prisotnost točke stopnje $n-1$ v grafu G, v katerem imata poljubni dve točki natanko enega skupnega soseda, nujno pomeni, da je G izomorfen t.i. grafu "mlin na veter", glej sliko 1.

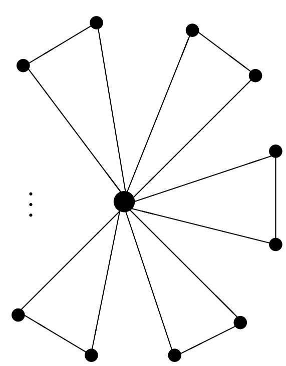

Figure 1: Graf "mlin na veter".

2 Dokaz izreka

Recimo, da izrek ne velja. Potem obstaja vsaj en protiprimer: graf G v katerem imata poljubni dve točki natanko enega skupnega soseda, vendar G ne vsebuje točke, ki bi bila sosednja z vsemi ostalimi točkami.

Lema 2 *Naj bo G protiprimer za izrek 1. Tedaj je G regularen.*

Dokaz. Najprej pokažimo, da imata poljubni dve nesosednji točki v G enako stopnjo. Naj bosta torej u in v dve taki točki in naj bo stopnja točke u enaka k, $d(u) = k$. Naj bodo točke $w_1, w_2, \ldots, w_k$ sosede točke u. Ker imata u in v natanko enega skupnega soseda, je to ena izmed točk w_i, recimo w_2. Poglejmo sedaj u in w_2. Njun skupni sosed je lahko samo ena izmed točk w_i, naj bo to (brez izgube za splošnost) w_1. Poglejmo sedaj v in w_i, kjer je $i \geq 2$. Njun skupni sosed ne more biti kaka točka w_j, saj bi sicer v G dobili C_4, to pa ni možno. Torej za vsak $i \geq 2$ obstaja točka z_i, tako da je z_i sosednja z v in w_i ter je hkrati z_i različna od vseh w_j. Nadalje so točke z_i med seboj paroma različne, saj bi sicer zopet dobili C_4. To pa že pomeni, da je $d(v) \geq k = d(u)$. Zaradi simetrije lahko sklepamo tudi, da velja $d(u) \geq d(v)$. Torej smo dokazali, da je $d(u) = d(v)$ za poljubni nesosednji točki u in v.

Pokazati moramo še, da imata enako stopnjo tudi poljubni sosednji točki u in v. Naj bodo zopet $w_1, w_2, \ldots, w_k$ sosede točke u, kjer je $v = w_1$. Naj bo z poljubna točka, ki ni sosednja z u. (Taka točka obstaja po predpostavki dokaza.) Če z ni sesednja z v, potem je po gornjem odstavku $d(u) = d(z)$ in $d(v) = d(z)$, torej je $d(u) = d(v)$. Zato lahko predpostavimo, da je v sosednja z vsemi točkami, ki niso v množici $\{w_2, \ldots, w_k\}$. Ker v ni sesednja z vsemi točkami, obstaja točka w_i, recimo w_2, s katero ni sosednja. Opazujmo sedaj točki z in w_2. Hitro se prepričamo, da bodisi nimata skupnega soseda, bodisi imata vsaj dva. Torej zadnji obravnavani primer ni možen in s tem je lema dokazana. □

Lema 3 *Naj bo G protiprimer za izrek 1. Tedaj je G k-regularen, kjer je $2 \leq k \leq n-2$. Nadalje G vsebuje $k^2 - k + 1$ točk.*

Dokaz. G je k-regularen po lemi 2. Očitno je $k \geq 2$, po predpostavki protiprimera pa mora tudi veljati $k \leq n - 2$.

Naj bo u poljubna točka grafa G in $w_1, w_2, \ldots, w_k$ njeni sosedi. Ker ima vsaka točka w_i natanko enega soseda med točkami $w_1, w_2, \ldots, w_k$, in je seveda sosednja z u, ima w_i natanko $k - 2$ drugih sosedov. Za različni točki morajo biti taki njuni sosedi paroma različni, saj bi sicer v G imeli C_4. Zato je vseh točk

$$1 + k + k(k-2) = k^2 - k + 1\,,$$

to pa smo tudi trdili. □

Lema 4 *Naj bo G protiprimer za izrek 1. Tedaj je G 2-regularen graf.*

Dokaz. Po lemi 2 vemo, da je G k-regularen, $k \geq 2$. Zato imamo v vsaki vrstici matrike sosednosti A grafa G natanko k enic. Zaradi predpostavki o sosednosti se poljubni dve vrstici matrike A ujemata v natanko eni enici. Matrika A je seveda tudi simetrična, zato je kvadrat matrike sosednosti oblike

$$A^2 = \begin{pmatrix} k & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & k & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 & k \end{pmatrix} = (k-1)I + J\,,$$

kjer je J kvadratna matrika samih enic.

J ima enostavno lastno vrednost n (l. vektor $(1, 1, \ldots, 1)^T$) in lastno vrednost 0 kratnosti $n-1$ (l. vektorji $(1, -1, 0, \ldots, 0)^T$, $(1, 0, -1, \ldots, 0)^T$, ..., $(1, 0, 0, \ldots, -1)^T$). Zato ima A^2 enostavno lastno vrednost $k - 1 + n$, ki je po lemi 3 enaka k^2, ter lastno vrednost $k - 1$ (kratnosti $n - 1$). Ker je matrika A simetrična, jo lahko diagonaliziramo, zato lahko izračunamo njene lastne vrednosti iz tistih za A^2. Zato ima A enostavno lastno vrednost k in lastne vrednosti $\pm\sqrt{k-1}$. Recimo, da je med slednjimi r takih s predznakom $+$ in s takih s predznakom $-$. Seveda je $r+s = n-1$. Iz linearne algebre vemo, da je vsota lastnih vrednosti matrike enaka njeni sledi. Ker imamo na diagonali matrike A same ničle, to pomeni:

$$k + r\sqrt{k-1} - s\sqrt{k-1} = 0\,.$$

Ker je $k \neq 0$, je seveda $r \neq s$. Zato je

$$\sqrt{k-1} = \frac{k}{s-r}\,.$$

Ker je koren naravnega števila racionalno število, je koren seveda celo število, zato je $\sqrt{k-1} = h$, za neko celo število h. Torej imamo

$$h(s-r) = k = (\sqrt{k-1})^2 + 1 = h^2 + 1\,.$$

Vidimo torej, da h deli $h^2 + 1$, torej mora biti $h = 1$. (Saj h deli tudi h^2.) Potem pa je $k = 2$. □

Dokazali smo torej, da je protiprimer k izreku 2-regularen. Poljuben 2-regularen graf je disjunktna unija ciklov. Ker mora biti protiprimer seveda povezan, je potemtakem G cikel. Med cikli pa pogoju sosednosti zadošča le trikotnik, to pa zagotovo ni protiprimer. S tem je izrek dokazan.

3 Zaključne opombe

Izrek tega seminarja lahko preformuliramo takole.

Izrek 5 (Ekvivalentna oblika izreka 1) *Naj bo G graf z $n \geq 3$ točkami, v katerem za vsak par točk obstaja natanko ena pot dolžine dva med njima. Tedaj G vsebuje točko stopnje $n-1$.*

Kotzig je leta 1983 postavil domnevo, da za večje dolžine ustrezni grafi ne obstajajo. Natančneje:

Domneva 6 *Naj bo $\ell \geq 3$. Tedaj ne obstaja graf z lastnostjo, da med poljubnima dvema točkama obstaja natanko ena pot dolžine ℓ.*

Medtem ko je bila domneva dokazana za nekatere ℓ-je, pa spločna rešitev še ni znana. Morda pa jo bo za doktorat dokazal kak mariborski kombinatorik...