

UNIVERZA V MARIBORU  
PEDAGOŠKA FAKULTETA MARIBOR  
ODDELEK ZA MATEMATIKO

**SEMINAR I**  
**Ravninska triangulacija in produkti grafov**

Pripravil: Marko Jakovac  
Mentor: Dr. Sandi Klavžar

MARIBOR, 2005

## 1 UVOD

Kaj je pravzaprav graf? Za nas bo graf končen, enostaven, neusmerjen in povezan z vsaj dvema točkama. V grafu  $G$  bomo z  $G[S]$  označevali podgraf  $S \subseteq G$ , ki ga inducira graf  $S$ . Če se v grafu lahko sprehodimo iz ene izbrane točke po vseh ostalih, tako da vsako obiščemo natanko enkrat in se na koncu vrnemo v začetno točko, potem temu sprehodu pravimo hamiltonova pot. Pravimo, da je graf lokalno hamiltonov, če je podgraf induciran iz soseščine vsake točke  $u$   $G[N(u)]$ , hamiltonov. Definirajmo še direktni produkt grafov. Direktni produkt grafov  $G$  in  $H$  je graf  $G \otimes H$  z točkami  $V(G) \times V(H)$  in množico povezav  $E(G \otimes H) = \{(u, x)(v, y) | uv \in E(G) \wedge xy \in E(H)\}$ . Za direktni produkt grafov pa vemo, da je komutativen in asociativen. Označimo z  $G * H$  leksikografski produkt z točkami  $V(G) * V(H)$  in množico povezav  $E(G * H) = \{(u, x)(v, y) | uv \in E(G) \vee (u = v \wedge xy \in E(H))\}$ . Ravninski graf  $G$  imenujemo ravninska triangulacija, če je obstaja taka vložitev v ravnino, da je vsako lice trikotnik.

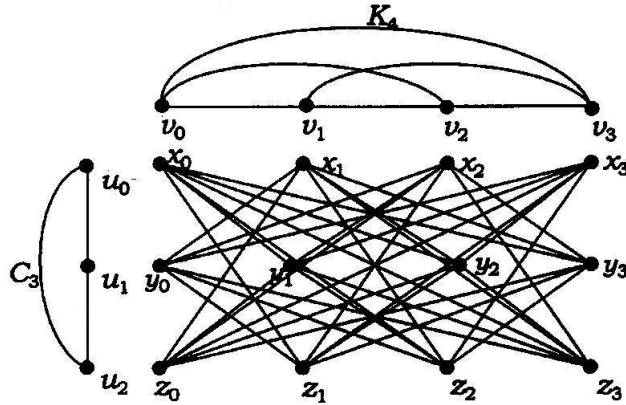
Domneva pravi, da vsak povezan, lokalno hamiltonov graf premore ravninsko triangulacijo kot podgraf. S pomočjo direktnega produkta grafov bomo pokazali, da ta domneva ne drži. Kot primer bomo pogledali grafa  $C_3 \otimes K_4$  in  $C_3 \otimes K_5$ . Lahko bi domnevali, da za protiprimer služijo tudi vsi grafi oblike  $C_3 \otimes K_n$ , za  $n \geq 6$ . Vendar to ni res, saj vsi ti grafi premorejo kakšno ravninsko triangulacijo kot podgrafi.

## 2 PROTIPRIMERI

Naj bo  $G = C_3 \otimes K_4$ . Pokazali bomo, da je  $G$  lokalno hamiltonov graf, vendar pa ne vsebuje nobene ravninske triangulacije kot podgraf. Naj bo  $V(C_3) = \{u_0, u_1, u_2\}$  in  $V(K_4) = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ . Naj bodo množice  $X = \{x_i = (u_0, v_i) | 0 \leq i \leq 3\}$ ,  $Y = \{y_i = (u_1, v_i) | 0 \leq i \leq 3\}$  in  $Z = \{z_i = (u_2, v_i) | 0 \leq i \leq 3\}$ . Očitno so po definiciji direktnega produkta,  $X, Y, Z$  in  $\{x_i, y_i, z_i\}$ ,  $0 \leq i \leq 3$ , neodvisne množice točk grafa  $G$  (Slika 1).

Najprej pokažimo, da je  $G$  lokalno hamiltonov graf. Zaradi simetrije, ki jo opazimo na Sliki 1, lahko brez izgube za splošnost pogledamo le eno točko in njene sosede. Izberimo točko  $x_0$ . Iz slike razberemo, da so sosedi točke  $x_0$  točke  $y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ . Iskani hamiltonov cikel v  $G[N(x_0)]$  je zaporedje  $y_1 z_2 y_3 z_1 y_2 z_3 y_1$ . To potrjuje, da je graf  $G$  lokalno hamiltonov.

Sedaj bomo dokazali, da  $C_3 \otimes K_4$  ne vsebuje ravninske triangulacije kot podgraf. Pa recimo, da je  $M$  neka ravninska triangulacija grafa  $G$ . Če je to



Slika 1:  $C_3 \otimes K_4$

res, potem je  $M$  3-povezan. Po definiciji direktnega produkta, je induciran podgraf  $Y \cup Z$  od  $M$ , označimo ga  $M[Y \cup Z] = H$ , dvodelni podgraf od  $M$ . Ker nobeni dve točki v  $X$  nista sosednji v  $M$ , potem so točke iz  $X$  v različnih licih od induciranega podgrafa  $H$ . Število lic v  $H$  mora biti enako številu točk v  $X$ , torej 4. V nasprotnem primeru bi  $M$  vseboval lica stopnje vsaj 4, kar pa ni res, ker je  $M$  ravninska trinagulacija. Opazimo, da lahko  $M$  rekonstruiramo iz  $H$ , tako da damo eno točko iz  $X$  znotraj vsakega lica v  $H$  in jo nato povežemo z vsemi točkami, ki sestavljajo lica. Temu bomo v nadaljevanju rekli rekonstrukcija  $M$  iz  $H$ . Uporabimo Eulerjevo formulo in dobimo, da je število povezav med  $Y$  in  $Z$  v  $M$  točno 10 in podobno dobimo, da je število povezav med  $X$  in  $Y$  ter med  $X$  in  $Z$  v  $M$  10.

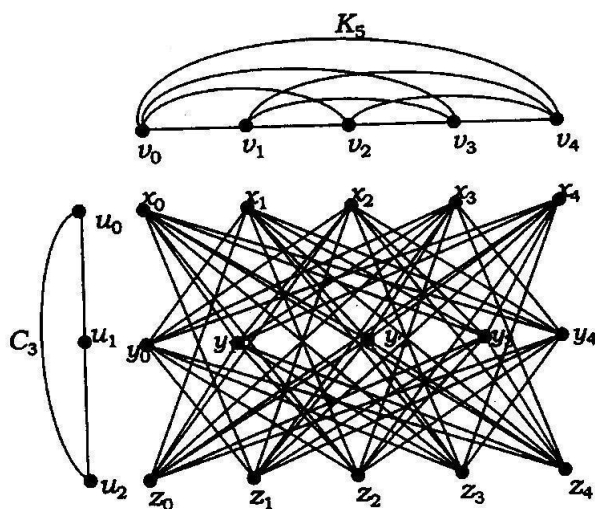
Trdimo, da  $H$  nima lica stopnje 8. Pa recimo, da ima lico stopnje 8. Potem ne moremo znotraj lica dati točke iz  $X$ , da bi rekonstruirali  $M$ , ker ima vsaka točka iz  $X$  stopnjo 6. Stopnja poljubnega lica od  $H$  je 4 ali 6, ker je  $H$  dvodelen graf. Trdimo, da  $H$  nima lica stopnje 4. Če bi obstajalo lico stopnje 4, potem bi cikel, ki sestavlja lico imel vse indekse točk  $\{0, 1, 2, 3\}$ , torej nobena točka iz  $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$  ne more biti dana znotraj lica, da rekonstruiramo  $M$ , ker je  $x_i$  nesosednja tako z  $y_i$ , kot z  $z_i$ ,  $0 \leq i \leq 3$  v  $M$ . To pa potrjuje domnevo, da nimamo lica stopnje 4. Ugotovili smo, da  $H$  vsebuje le lica stopnje 6. Vemo, da je

$$\sum_{f \in F} d(f) = 2|E(H)| = 20,$$

kjer je  $d(f)$  stopnja posameznega lica  $f$  v množici vseh lic  $F$ . Vemo tudi, da je  $|F| = 4$  in  $d(f) = 6$  za vsako lico, kar pa je v protislovju z zgornjo vsoto. To pa pomeni, da  $G = C_3 \otimes K_4$  ne premore nobene ravninske triangulacije

kot podgraf.

Naj bo sedaj  $G = C_3 \otimes K_5$ . Kot bomo videli, tudi  $G$  služi kot protiprimer zgornji domnevi. Naj bo  $V(C_3) = \{u_0, u_1, u_2\}$  in  $V(K_5) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ . Naj bodo množice  $X = \{x_i = (u_0, v_i) | 0 \leq i \leq 4\}$ ,  $Y = \{y_i = (u_1, v_i) | 0 \leq i \leq 4\}$  in  $Z = \{z_i = (u_2, v_i) | 0 \leq i \leq 4\}$ . Očitno so po definiciji direktnega produkta,  $X, Y, Z$  in  $\{x_i, y_i, z_i\}$ ,  $0 \leq i \leq 4$ , neodvisne množice točk grafa  $G$  (Slika 2).



Slika 2:  $C_3 \otimes K_5$

Najprej pokažimo, da je  $G$  lokalno hamiltonov graf. Zaradi simetrije, ki jo opazimo na Sliki 2, lahko brez izgube za splošnost pogledamo le eno točko in njene sosede. Izberimo točko  $x_0$ . Iz slike razberemo, da so sosedi točke  $x_0$  točke  $y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, z_3, z_4$ . Iskani hamiltonov cikel v  $G[N(x_0)]$  je zaporedje  $y_1 z_3 y_2 z_4 y_3 z_1 y_4 z_2 y_1$ . To potrjuje, da je graf  $G$  lokalno hamiltonov.

Sedaj bomo dokazali, da  $C_3 \otimes K_5$  ne vsebuje ravninske triangulacije kot podgraf. Pa recimo, da je  $M$  neka ravninska triangulacija grafa  $G$ . Če je to res, potem je  $M$  3-povezan. Po definiciji direktnega produkta, je inducirani podgraf  $Y \cup Z$  od  $M$ , označimo ga  $M[Y \cup Z] = H$ , dvodelni podgraf od  $M$ . Ker nobeni dve točki v  $X$  nista sosednji v  $M$ , potem so točke iz  $X$  v različnih licih od inducirane podgrafa  $H$ . Število lic v  $H$  mora biti enako številu točk v  $X$ , torej 5. Ker je  $M$  3-povezan in je  $X$  neodvisna množica v  $G$ , množica  $H$  ne more vsebovati presečne točke. Če bi katera točka  $y_i$  iz  $H$  bila presečna, potem mora biti incidenčna z licem stopnje vsaj 4 v  $H$ . Naj

bo  $x_j$  ena točka iz  $M$  znotraj lica  $f$ , potem bi  $\{x_j, y_i\}$  bila presečna množica v  $M$ , kar pa ni res. To nam pove, da je  $H$  2-povezan. Z uporabo Eulerjeve formule dobimo, da je število povezav v  $H$  natanko 13. To pa pomeni, da je število povezav med  $Y$  in  $Z$  v  $M$  13. Podobno bi dokazali, da je število povezav med  $X$  in  $Y$  ter  $X$  in  $Z$  v  $M$  prav tako 13.

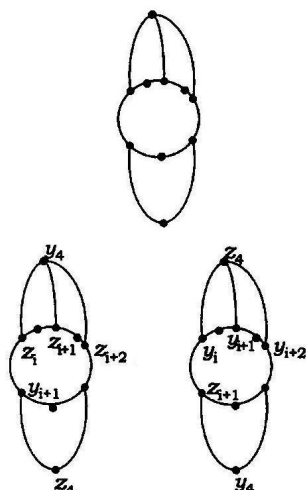
Pokažimo, da  $H$  nima lica stopnje 10. Če bi tako lice obstajalo, potem nobeno točko iz  $X$  ne moremo dati znotraj tega lica, da bi rekonstruirali  $M$ , ker ima vsaka točka v  $G$  stopnjo 8. Graf  $H$  prav tako nima lica stopnje 8. Naj bo recimo  $f_0$  lice stopnje 8, potem imajo točke, ki obdajajo lice indekse  $\{0, 1, 2, 3, 4\} \setminus \{i\}$ . Brez izgube za splošnost lahko privzamemo, da točke  $y_0 z_2 y_1 z_3 y_2 z_0 y_3 z_1 y_0$  obdajajo lice  $f_0$ . Ker je

$$\sum_{f \in F} d(f) = 2|E(H)|,$$

kjer je  $d(f)$  stopnja posameznega lica v  $H$  in  $F$  število lic v dvodelnem grafu  $H$ . Tako dobimo

$$4\varphi_4 + 6\varphi_6 + 8\varphi_8 = 26 \quad \varphi_4 + \varphi_6 + \varphi_8 = 5,$$

kjer  $\varphi_i$  predstavlja število lic stopnje  $i$  v  $H$ . Ker je  $H$  dvodelni graf, ki ima natanko 5 lic, ima zgornja enačba enolično rešitev  $\varphi_8 = 1$ ,  $\varphi_6 = 1$  in  $\varphi_4 = 3$ . Potem mora biti  $H$  izomorfen zgornjemu grafu na Sliki 3. Indeksiranje točk na grafu pa prikazujeta spodnja dva grafa na Sliki 3.

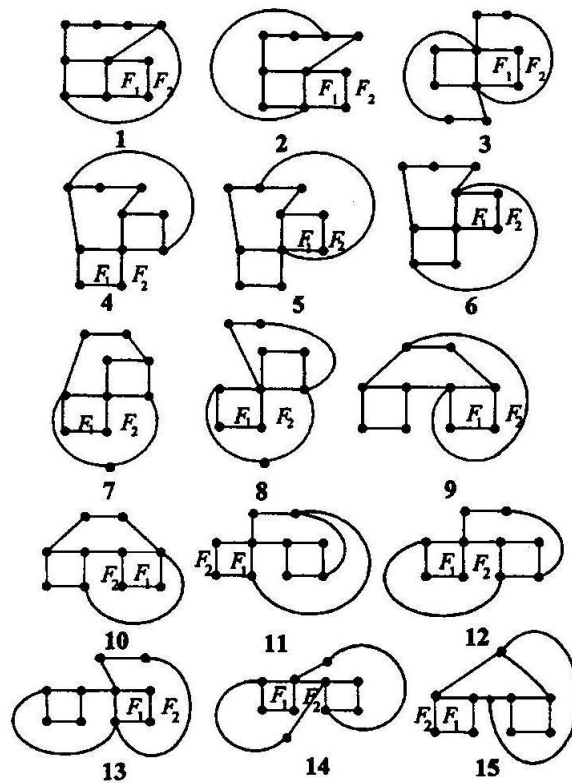


Slika 3: Graf z licem stopnje 8

Tako je lahko  $y_4$  skupna točka dveh lic stopnje 4, ali pa je to točka  $z_4$ . Poglejmo primer z  $y_4$ . Podobno pristopimo za primer z  $z_4$ . Točka  $y_4$  je sosednja točka z  $y_i$ ,  $y_{i+1}$  in  $y_{i+2}$ . Tako vidimo, da vsa lica v  $H$  vsebujejo točko  $y_{i+1}$  ali točko  $z_{i+1}$ . Torej  $x_{i+1}$  ne moremo postaviti znotraj nobenega lica, da bi rekonstruirali  $M$ , kar pa je protislovje. Sklepamo lahko, da je  $\varphi_8 = 0$ . Potem lahko enakost z vsotami zapišemo na naslednji način

$$4\varphi_4 + 6\varphi_6 = 26 \quad \varphi_4 + \varphi_6 = 5.$$

Ta enačba ima enolično rešitev in sicer  $\varphi_4 = 2$  in  $\varphi_6 = 3$ . Sedaj mora biti  $H$  izomorfen enemu izmed grafov na Sliki 4,5,6 in 7. Pokazali bomo, da  $M$  ne moremo rekonstruirati iz nobenega od narisanih grafov.

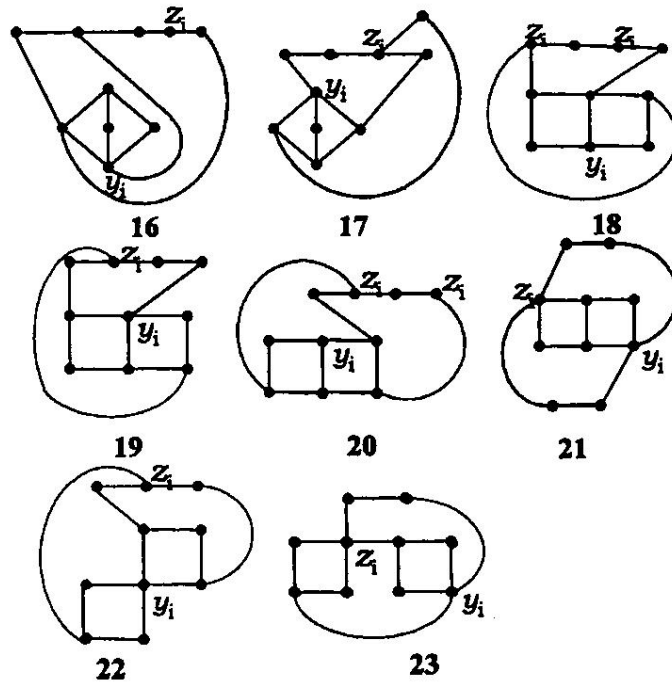


Slika 4: Dve lici s skupnimi točkami

Najprej si oglejmo grafe na Sliki 4. Na sliki označimo z  $F_1$  množico točk, ki obdajajo lice stopnje 4 in so hkrati vsebovane v množici točk, ki obdajajo lice  $F_2$  stopnje 6. Indeksi točk, ki obdajajo lice stopnje 4 bi morali

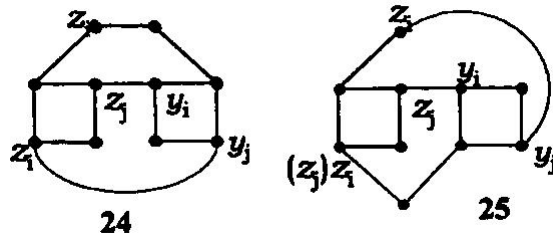
biti  $\{0, 1, 2, 3, 4\} \setminus \{i\}$  za  $0 \leq i \leq 4$ . Ker so indeksi  $\{0, 1, 2, 3, 4\} \setminus \{i\}$  skupni točkam lica  $F_1$  in tudi lica  $F_2$ , je točka  $x_i$  edina točka, ki jo lahko damo znotraj  $F_1$  in hkrati  $F_2$ , da rekonstruiramo  $M$  iz  $H$ , kar pa je nemogoče.

Oglejmo si primere na sliki 5. Opazimo, da je razdalja  $d_H(y_i, z_i) \geq 3$  za  $0 \leq i \leq 4$ . Vsaka pot med  $y_i$  in  $z_i$  za  $0 \leq i \leq 4$  je lihe dolžine in diameter grafa  $H$  je 4, kar pomeni, da je  $d_H(y_i, z_i) = 3$ . Brez izgube za splošnost fiksirajmo  $y_1$ . Potem mora  $z_1$  biti tam, kjer prikazuje slika 5, zato ker je  $d_H(y_1, z_1) = 3$  (možni sta tudi dve takšni točki  $z_1$ ). Vsa lica pa vsebujejo vsaj eno izmed točk  $y_i$  in  $z_i$ . Torej  $x_i$  ne moremo položiti znotraj nobenega lica v  $H$ , da bi rekonstruirali  $M$ .



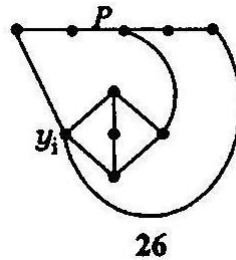
Slika 5: Grafi z diametrom 4

Naj bo sedaj  $M$  izomorfen kateremu izmed grafov na sliki 6. Če brez izgube za splošnost fiksiramo  $y_i$ , potem imamo dve možnosti za  $z_i$ , če upoštevamo  $d_H(y_i, z_i) = 3$ . Fiksirajmo zdaj še  $y_j$ , kar nam na prvi sliki da enolično možnost za  $z_j$  in dve možnosti na drugi sliki. V vsakem primeru pa imamo lica, ki vsebujejo točke  $\{y_i, z_i\}$  ali  $\{y_j, z_j\}$ . Torej ne moremo v nobeno od teh lic položiti  $x_i$  ali  $x_j$ , da bi rekonstruirali  $M$  iz  $H$ .



Slika 6: Grafa z diametrom 4

Kot zadnji primer pogledimo, da  $H$  ne more biti izomorfen grafu na Sliki 7. Očitno morajo točke podgrafa  $K_{2,3}$  grafa na Sliki 7 imeti indekse  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Kot posledica tega, morajo biti indeksi poti  $P$ , grafa na Sliki 7,  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Tako imajo točke na zunanjem licu indekse 0, 1, 2, 3, 4. Nobeno točke iz množice  $X$  ne moremo položiti v zunanje lice od  $H$ , da bi rekonstruirali  $M$  iz  $H$ . Tako smo pogledali vse primeri in pokazali, da graf  $G = C_3 \otimes K_5$  ne premore nobene ravninske triangulacije kot podgraf.



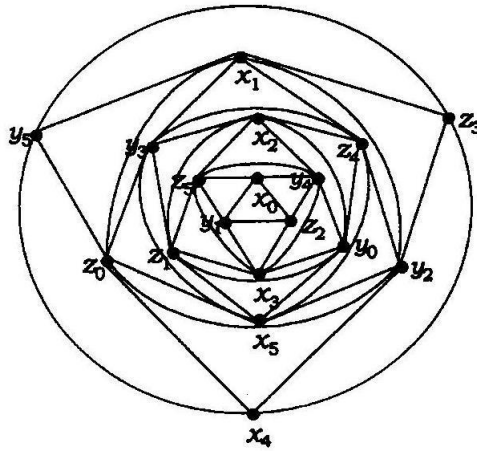
Slika 7: Graf s podgrafom  $K_{2,3}$  in s potjo  $P$

Kot smo povedali na začetku, lahko pričakujemo, da graf  $G = C_3 \otimes K_6$  premore kakšno ravninsko trinagulacijo kot podgraf. Zapišimo množice  $X$ ,  $Y$  in  $Z$ , kot v prejšnjih dveh primerih. Dane točke razporedimo na način, kot prikazuje Slika 8.

Zdaj pokažimo še splošno konstrukcijo ravninske triangulacije poljubnega grafa oblike  $G = C_3 \otimes K_n$ , za  $n \geq 6$ .

Ločili bomo tri različne primere. Naj bo  $n \equiv 0(mod3)$ . Zapišimo  $x$ ,  $y$  in  $z$  v polje, kot prikazuje prvi stolpec Slike 9. Nato vzamemo prvo vrstico polja za indekse točk  $x$ ,  $y$  in  $z$ , da konstruiramo notranji cikel  $C_3$ , podobno kot na Sliki 8. Naslednji cikel konstruiramo s pomočjo druge vrstice polja indeksov. Tako





Slika 8: Ravninska triangulacija grafa  $G = C_3 \otimes K_6$

nadaljujemo postopek in dobimo želeno ravninsko triangulacijo. Podobno pristopimo pri primeru  $n \equiv 1(\text{mod}3)$  in  $n \equiv 2(\text{mod}3)$ , le da uporabimo drugi oziroma tretji stolpec polja indeksov na Sliki 9.

<b>x</b>	<b>y</b>	<b>z</b>	<b>x</b>	<b>y</b>	<b>z</b>	<b>x</b>	<b>y</b>	<b>z</b>
0	1	2	0	1	2	0	1	2
3	4	5	3	4	5	3	4	5
6	7	8	6	7	8	6	7	8
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
<b>n-3</b>	<b>n-2</b>	<b>n-1</b>	<b>n-1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>n-2</b>	<b>n-1</b>	<b>0</b>
2	0	1	2	3	4	1	2	3
5	3	4	5	6	7	4	5	6
8	6	7	8	9	10	7	8	9
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
<b>n-1</b>	<b>n-3</b>	<b>n-2</b>	<b>n-2</b>	<b>n-1</b>	<b>0</b>	<b>n-1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
1	2	0	1	2	3	2	3	4
4	5	3	4	5	6	5	6	7
7	8	6	7	8	9	8	9	10
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
<b>n-2</b>	<b>n-1</b>	<b>n-3</b>	<b>n-3</b>	<b>n-2</b>	<b>n-1</b>	<b>n-3</b>	<b>n-2</b>	<b>n-1</b>

Slika 9: Konstrukcija ravninske triangulacije za grafe  $G = C_3 \otimes K_n$ ,  $n \geq 6$

### 3 NOV PROBLEM

Z zgornjimi ugotovitvami si lahko zastavimo nov problem. Če  $G$  ne premore ravninske triangulacije kot podgraf, potem  $G * \overline{K}_n$ , kjer je  $\overline{K}_n$  komplement grafa  $K_n$  in  $n \geq 3$ , ne premore nobene ravninske triangulacije kot podgraf.

Če je ta problem resničen, potem lahko dobimo neskončno družino lokalno hamiltonovih grafov, ki ne premorejo ravninske triangulacije kot podgrafi. Enostavno za  $G$  vzamemo grafa  $C_3 \otimes K_4$  ali  $C_3 \otimes K_5$ .