KOLIKO MANJKA GRAFU DO RAVNINSKOSTI

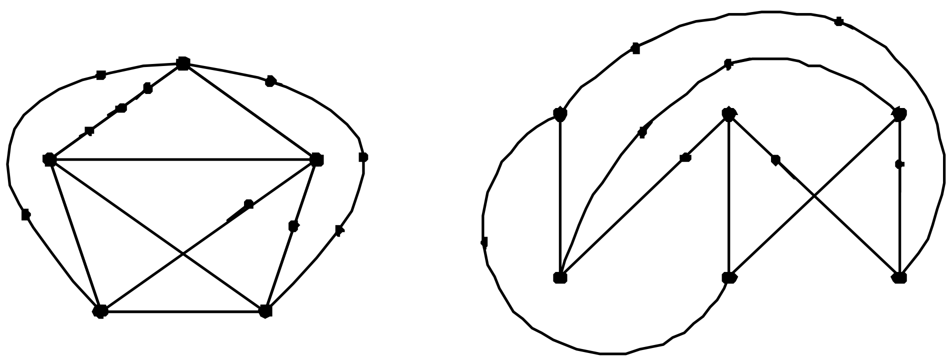
Marjana Sedeljšak

Maj, 2004

1 KOLIKO MANJKA GRAFU DO RAVNINSKOSTI

1.1 Prekrižna števila

V prejšnjem poglavju smo dokazali, da grafa K_5 in $K_{3,3}$ nista ravninska. Vendar slika 1a ni slika grafa K_5, ampak je slika subdivizije K_5, kar pomeni, da so bile nekatere točke stopnje dve dodane povezavam grafa K_5. Podobno je graf na sliki 1b subdivizija $K_{3,3}$.



Slika 1: Primer subdivizije K_5 in $K_{3,3}$

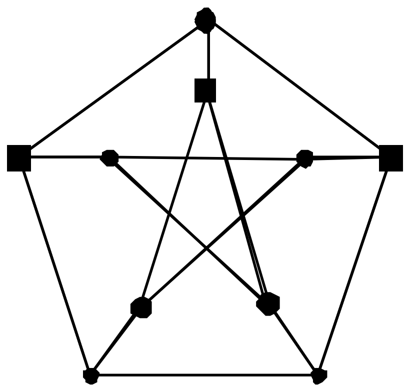
Subdivizijo grafa G dobimo tako, da povezavam grafa G dodamo točke stopnje dve.

Če graf G ni ravninski, potem tudi subdivizija grafa G ni ravninska. Če graf G vsebuje neravninski podgraf, potem G ni ravninski.

IZREK 1 *(Kuratowski)*
Graf G je ravninski natanko takrat, ko ne vsebuje subdivizije $K_{3,3}$ in ne subdivizije K_5.

PRIMER: *S pomočjo izreka Kuratowskega pokaži, da Petersenov graf ni ravninski.*

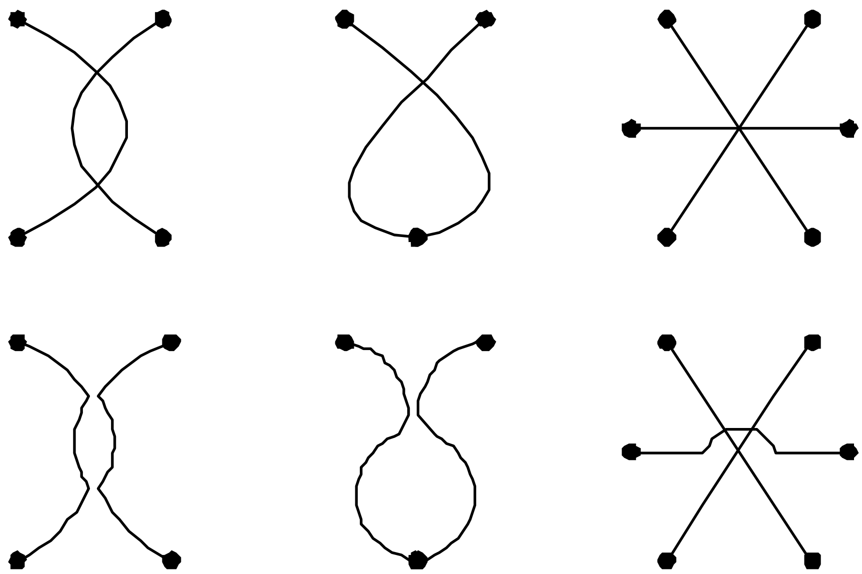
Izrek Kuratowskega nam pove, da graf, ki ni ravninski, vsebuje subdivizijo $K_{3,3}$ ali subdivizijo K_5. Petersenov graf ne more vsebovati subdivizije K_5. Iščemo torej subdivizijo grafa $K_{3,3}$. Začnemo v poljubni točki, recimo zgornji. Njene sosede označimo za točke v nasprotni množici dvodelnega grafa $K_{3,3}$. Manjkajoči točki izberemo iz notranje peterice. Torej Petersenov graf vsebuje subdivizijo $K_{3,3}$ in zato ni ravninski.



Slika 2: Petersenov graf ni ravninski

Enostavna risba grafa je taka slika v ravnini, za katero velja:
a) poljubni različni povezavi imata največ eno križanje;
b) poljubni povezavi incidenčni s točko se ne križata;
c) nobene tri povezave se ne križajo v skupni točki.

Zgornja vrsta na sliki 3 prikazuje tri neenostavne oblike, spodnja pa njihove tri enostavne dvojnike. Pri risanju grafov v ravnini lahko neenostavne oblike odpravimo z neznatnimi spremembami, tako da ne vplivamo na preostali graf.



Slika 3: Primeri neenostavnih in enostavnih risb

Vsak končen graf ima enostavno risanje v ravnini.

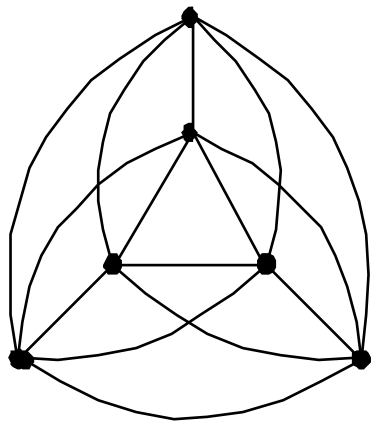
Če se več kot dve povezavi sekata v isti točki, kot pri zgornjem desnem liku na sliki 3, imenujemo to **večkratno križišče**.

Naj bo G graf. V splošnem obstaja več načinov za načrtanje grafa G v ravnini brez večkratnih križišč. Od vseh takšnih risanj naj bo najmanjše tisto, ki ima minimalno število križišč. To minimalno število imenujemo **prekrižno število grafa** G in ga označimo s $\mathbf{cr(G)}$. Takšno risanje je vedno enostavno risanje. Na sliki 3 je seveda prekrižno število vsakega ravninskega grafa enako 0.

Prekrižno število grafa K_5 je $cr(K_5) = 1$ in grafa $K_{3,3}$ je $cr(K_{3,3}) = 1$.

IZREK 2
Prekrižno število grafa K_6 *je* $cr(K_6) = 3$.

Prvi dokaz.
Enostavno risbo grafa K_6 v ravnini znamo narisati s tremi križanji (slika 4). Torej vemo, da je $cr(K_6) \leq 3$.



Slika 4: Enostavna risba grafa K_6

Predpostavimo, da obstaja risanje s samo dvema križanjema. Označimo točke s številkami in načrtajmo dve križanji dveh četveric, denimo (1234) in (3456). Iz risbe odstranimo točko 4 in vse povezave incidenčne s to točko. Dobimo ravninsko risbo grafa K_5, ki pa vemo, da ne obstaja. To nam pove, da je $cr(K_6) \geq 3$ in od tod sledi, da $cr(K_6) = 3$. □

Drugi dokaz.
Enostavno risbo grafa K_6 v ravnini znamo narisati s tremi križanji (slika 4). Torej vemo, da je $cr(K_6) \leq 3$.
Predpostavimo, da lahko narišemo graf K_6 s samo dvema križanjema. Potem imamo dve povezavi v K_6, ki onemogočata ravninskost grafa. Iskani ravninski graf ima šest točk in trinajst povezav. Po že znanem izreku (glej prejšnje poglavje) je v ravninskem grafu z n točkami in m povezavami število povezav enako $m = 3 \cdot n - 6$. Od koder sledi trditev $13 = 3 \cdot 6 - 6$, ki ni resnična. In tako smo prišli do protislovja s predpostavko. □

Richard Guy je pokazal, da **za polne grafe** velja naslednja neenakost:

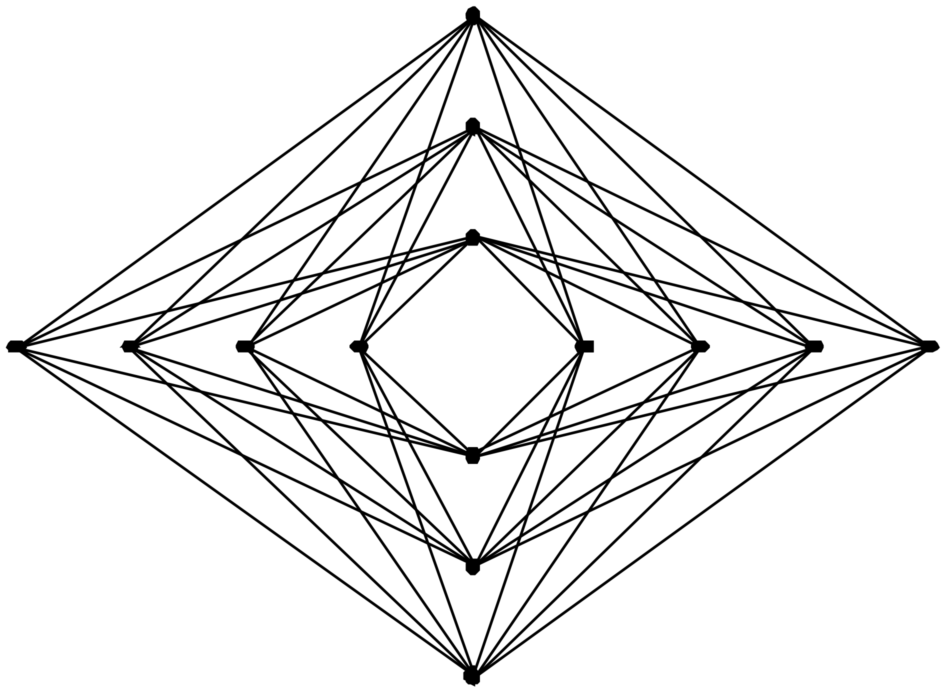
$$cr(K_n) \leq \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor .$$

Domneva 1
Zgoraj velja enakost za $n \geq 3$.

Enakost je dokazana za $n \leq 10$.

Prekrižna števila polnih dvodelnih grafov $K_{n,m}$.

Da bi dobili zgornjo mejo za prekrižna števila polnih dvodelnih grafov $cr(K_{n,m})$, porazdelimo m modrih točk na navpično os in n rdečih točk na vodoravno os, kot prikazuje slika 5.



Slika 5: Število križanj v polnem dvodelnem grafu $K_{6,8}$

Prvič predpostavimo, da sta m in n obe sodi, recimo $m = 2t$ in $n = 2s$. Naj bo t modrih točk zgoraj in t spodaj ter s rdečih točk na levi strani in s na desni. Na sliki 5 je $t = 3$ in $s = 4$. Povežimo vsako rdečo točko z vsako modro točko z ravno črto. Paziti moramo, da pri tem ne ustvarimo večkratnih križišč. Če se to zgodi, potem enostavno premaknemo eno ali več točk čisto malo navzgor ali navzdol.
Število križišč v tem risanju znamo prešteti. V prvem kvadrantu so križišča določena z vsakim parom rdečih točk skupaj z vsakim parom modrih točk. Tako imamo v prvem kvadrantu $\binom{t}{2}\binom{s}{2}$ križišč. V vseh štirih kvadrantih imamo enako število križišč, ker sta m in n obe sodi. Tako je skupno število križišč

$$4\binom{t}{2}\binom{s}{2} = 4\frac{t(t-1)}{2}\frac{s(s-1)}{2},$$

od koder sledi, da je

$$cr(K_{2t,2s}) \leq t(t-1)s(s-1).$$

Če ne bi zahtevali, da sta m in n obe sodi, potem bi bila situacija malce drugačna, toda ideja še vedno ista. Ločimo dva primera.

Predpostavimo, da sta m in n obe lihi; $m = 2t+1$ in $n = 2s+1$. Potem je $t+1$ modrih točk zgoraj in t modrih točk spodaj; $s+1$ rdečih točk je na desni in s rdečih na levi. Ko so narisane vse povezave, znaša število križišč:

$$\begin{aligned}
&\binom{t+1}{2}\binom{s+1}{2} + \binom{t+1}{2}\binom{s}{2} + \binom{t}{2}\binom{s+1}{2} + \binom{t}{2}\binom{s}{2} \\
&= \left(\binom{t+1}{2} + \binom{t}{2}\right)\left(\binom{s+1}{2} + \binom{s}{2}\right) \\
&= \left(\frac{(t+1)t}{2} + \frac{t(t-1)}{2}\right)\left(\frac{(s+1)s}{2} + \frac{s(s-1)}{2}\right) \\
&= \left(\frac{t(t+1+t-1)}{2}\right)\left(\frac{s(s+1+s-1)}{2}\right) = t^2 s^2.
\end{aligned}$$

Tako je

$$cr(K_{2t+1,2s+1}) \leq t^2 s^2.$$

Ostane nam še primer, ko je m liho in n sodo število; $m = 2t+1$ in $n = 2s$. Potem je

$$cr(K_{2t+1,2s}) \leq t^2 s(s-1).$$

Dokaz je prepuščen za vajo.

Vsi trije primeri so združeni v izreku 3:

IZREK 3
Prekrižno število polnega dvodelnega grafa $K_{m,n}$ zadošča neenakosti:

$$cr(K_{m,n}) \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Enakost je izpolnjena, če je $m \leq 6$ in n poljubno število. Domneva pa se, da enakost velja za poljubne m in n.