Razdalja v drevesih in grafih

Sonja Denša

8. avgust 2005

Kadar uporabljamo graf kot komunikacijsko mrežo želimo imeti točke blizu skupaj, da se izognemo komunikacijskemu zastoju. Razdalje izmerimo s pomočjo dolžine poti.

Definicija 1. *Če ima graf G u, v - pot, potem je* **razdalja** *od u do v, ki jo označimo z $d_G(u, v)$ ali preprosteje $d(u, v)$, najkrajša dolžina u, v - poti. Če graf G nima take poti, potem je $d(u, v) = \infty$. Največji razdalji med parom točk grafa G pravimo* **premer (diameter)** *grafa,*

$$diam(G) = max_{u,v \in V(G)} d(u, v)$$

oziroma

$$diam(G) = max\{d_G(u, v) | u, v \in V(G)\}.$$

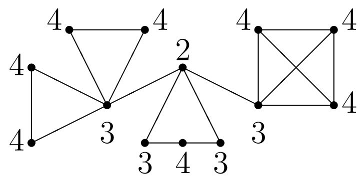
Ekscentričnost *točke u,označen z $\epsilon(u)$, je $max_{v \in V(G)} d(u, v)$.* **Polmer (radij)** *grafa G, ki ga označimo z $radG$, je najmanjša ekscentričnost točke u,*

$$rad(G) = min_{u \in V(G)} \epsilon(u).$$

Premer je enak največji ekscentrični točki. V nepovezanemu grafu sta premer in polmer (in vsaka ekscentričnost) neskončna, ker je razdalja med točkama v različnih komponentah neskončna. Besedo premer uporabljamo primerno njegovi uporabi v geometriji, kjer je največja razdalja med dvema elementoma iz množice.

PRIMER 1. *Petersenov graf ima premer 2, ker imata nesosednji točki skupnega soseda. Hiperkocka Q_k ima premer k, ker je potrebnih k korakov, da zamenjamo vse k koordinate. Cikel C_n ima premer $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. V vseh teh primerih imajo vse točke isto ekscentričnost in zato je $diam(G) = rad(G)$.*
Za $n \geq 3$; drevo z n- točkami in z najmanjšim premerom je zvezda s premerom 2 in polmerom 1. Eden od največjih premerov je pot s premerom $n-1$ in polmerom $\lceil \frac{(n-1)}{2} \rceil$. Vsaka pot v drevesu je najkrajša pot med svojimi

končnimi točkami. Tako je premer drevesa dolžina svoje najdaljše poti. Vsaka točka v spodnjem grafu je označena s svojo ekscentričnostjo. Polmer je 2*, premer je* 4 *in dolžina najdaljše poti je* 7*.*



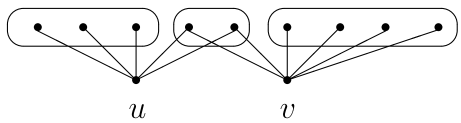
Če bi hoteli imeti velik premer, bi moralo manjkat veliko povezav. Potemtakem pričakujemo, da bo komplement grafa z velikim premerom imel majhen premer. Uporabimo preprosto opazko, da ima graf premer največ 2 natanko takrat, ko imata dve nesosednji točki skupnega soseda.

Izrek 1. *Če je G enostavni graf, potem velja*

$$diam(G) \geq 3 \Rightarrow diam(\overline{G}) \leq 3$$

.

Dokaz. Kadar je $diam(G) > 2$, takrat obstajata nesosednji točki $u, v \in V(G)$, ki nimata skupnih sosedov. Zato ima vsak $x \in V(G) - \{u, v\}$ vsaj enega od $\{u, v\}$, ki ni sosednji. Tako je x sosedenj v $\overline{G}$ z vsaj enim od $\{u, v\}$ v $\overline{G}$. Ker je tudi $uv \in E(\overline{G})$, obstaja za vsak par x, y x, y- pot dolžine največ 3 v $\overline{G}$ skozi $\{u, v\}$. Iz tega sledi, da je $\overline{G} \leq 3$.



$\overline{G}$

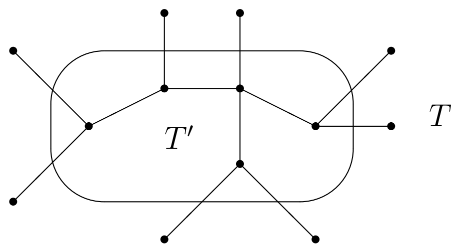
□

Definicija 2. Center *grafa G je podgraf, ki je induciran s točkami z minimalno ekscentričnostjo.*

Center grafa je polni graf natanko takrat, ko sta premer in polmer enaka. V nadaljevanju bomo opisali center drevesa. V indkcijskem koraku bomo izbrisali vse liste namesto samo enega.

Izrek 2. *(Jordan 1869) Center drevesa je točka ali povezava.*

Dokaz. Izrek bomo dokazali z indukcijo po številu točk v drevesu.
Osnovni korak: $n(T) \leq 2$. Center drevesa z največ dvema točkama je celotno drevo.
Indukcijski korak: $n(T) > 2$. Oblika T' naj bo drevo T brez listov. Po lemi iz prejšnjega poglavja je T' drevo. T' ima vsaj eno točko, ker imajo notranje točke na poteh med listi v T preostanek.
Vsaka točka z maksimalno razdaljo v T od točke $u \in V(T)$ je list (sicer bi lahko pot od u do v še podaljšali). Ker so bili odstranjeni vsi listi in nobena pot med dvema točkama ne uporablja lista, je $\epsilon_{T'}(u) = \epsilon T(u) - 1$ za vsak $u \in V(T')$. Torej je ekscentričnost lista v T večja kot pa ekscentričnost njenih sosedov v T. Torej so točke, ki minimizirajo $\epsilon_T(u)$ iste, kot točke, ki minimizirajo $\epsilon_{T'}(u)$.
Pokazali smo, da imata T in T' isti center. Po indukcijski predpostavki je center T' točka ali povezava.



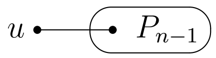
□

V komunikacijski mreži je velik premer lahko sprejemljiv, če večina parov lahko komunicira po najkrajši poti. Ta primer so preučili na povprečni razdalji namesto na maksimalni. Ker je povprečje vsota razdeljena po $\binom{n}{2}$ (število parov točk), je ekvivalentno preučiti $D(G) = \sum_{u,v \in V(G)} d_G(u, v)$. Vsota $D(G)$ je bila poimenovana Wiener indeks grafa G (oznaka $W(G)$). Wiener je to uporabil za študijo vrelišča parafina. Molekule so lahko prikazane z grafom, v katerem točke prikazujejo atome in povezave prikazujejo atomske vezi. Mnogo kemijskih lastnosti molekul je sorodnih z Wienerjevim indeksom za ustrezen graf. Mi bomo preučevali ekstremne vrednosti $D(G)$.

Izrek 3. *Izmed dreves z n- točkami sta Wiener indeks $D(T) = \sum_{u,v} d(u, v)$ minimiziran z zvezdami in maksimiziran s potmi oba posebna primera.*

Dokaz. Ker ima drevo $n - 1$ povezav, ima $n - 1$ parov točk razdaljo 1, vsi ostali pari pa imajo razdaljo vsaj 2. Zvezda doseže to in zato minimizira $D(T)$. Pokažimo, da nobeno drugo drevo ne doseže tega. Naj bo x list v T in v naj bo njegov sosed. Če imajo vse ostale točke razdaljo 2 od x,

potem morajo biti sosede od v. Iz tega pa sledi, da je T zvezda. Vrednost je $D(K_{1,n-1}) = (n-1) + 2\binom{n-1}{2} = (n-1)^2$.
Za maksimizacijo upoštevajmo najprej $D(P_n)$. To je enako vsoti razdalj od končne točke u do druge točke plus $D(P_{n-1})$. Imamo $\sum_{v \in V(P_n)} d(u,v) = \sum_{i=0}^{n-1} i = \binom{n}{2}$. Potemtakem je $D(P_n) = D(P_{n-1}) + \binom{n}{2}$. S Pascal-ovo formulo $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ dobimo $D(P_n) = \binom{n+1}{3}$.



Z indukcijo po n bomo dokazali, da je izmed dreves z n- točkami P_n edino drevo, ki maksimizira $D(T)$.
Osnovni korak: $n = 1$. Edino drevo z eno točko je P_1. Indukcijski korak: $n > 1$. Naj bo T drevo z n- točkami in u list na njem. Sedaj je $D(T) = D(T-u) + \sum_{v \in V(T)} d(u,v)$. Po indukcijski predpostavki je $D(T-u) \leq D(P_{n-1})$; enakost velja natanko takrat, ko je $T - u$ pot. Potemtakem zadostuje pokazati, da ja $\sum_{v \in V(T)} d(u,v)$ maksimiziran samo takrat, ko je T pot in u končna točka drevesa T.
Upoštevajmo seznam razdalj od u. V P_n je ta seznam $1, 2, \ldots, n-1$ različen. Najkrajša pot od u do najoddaljenejše točke od u vsebuje točke iz vseh razdalj od u, tako v nobenem drevesu množica razdalj od u do ostalih točk nima vrzeli. Potemtakem nobena ponovitev ne naredi $\sum_{v \in V(T)} d(u,v)$ manjše kot takrat, ko je u list na poti. Kadar T ni pot, se taka ponovitev zgodi. $\square$

Pri vseh povezanih grafih z n- točkami je $D(G)$ minimiziran s K_n. Problem maksimiziranosti reduciramo na to kar smo že počeli z drevesi.

Lema 4. *Če je H podgraf grafa G, potem je $d_G(u,v) \leq d_H(u,v)$.*

Dokaz. Vsaka u,v-pot v H se pojavi tudi v G. Tako najkrajša u,v-pot v G ni daljša od najkrajše u,v-poti v H. $\square$

Posledica 5. *Če je G povezan graf z n- točkami, potem je $D(G) \leq D(P_n)$.*

Dokaz. Naj bo T vpeto drevo drevesa G. Po prejšnji lemi je $D(G) \leq D(T)$. Po prejšnjem izreku pa je $D(T) \leq D(P_n)$. $\square$