Seznamsko barvanje ravninskih grafov (seminarska naloga)

Mirnesa Kurtič

13. maj 2003

Ravninski grafi in njihovo barvanje so predmet raziskav že od začetka teorije grafov zaradi njihove povezanosti s problemom štirih barv.

Problem štirih barv: Ali je vedno mogoče pobarvati regije ravninskega zemljevida s štirimi barvami, tako da so deli, ki delijo isto mejo in ne le točke, različno pobarvani? Slika 1: Zemljevid M in dualni graf G

Graf G je dualni graf zemljevida M. Vidimo, da je G graf vložen v ravnino. Opazimo, da je barvanje regij zemljevida M ekvivalentno barvanju točk grafa G, zato se bomo v nadaljevanju osredotočili na barvanje točk ravninskega graf G.
Opazimo, da G nima zank in večkratnih povezav. Očitno pri barvanju grafa G lahko privzamemo, da je G povezan, saj lahko barvamo vsak povezani del ločeno.
Ravninski graf razdeli ravnino na množico lic R. Eulerjeva formula pravi, da za povezani ravninski graf $G = (V, E)$ velja: $|V| - |E| + |R| = 2$.
Heawood je dokazal izrek petih barv, da lahko vsak ravninski graf pobarvamo s petimi barvami, tako da so sosednje točke različnih barv. Dokaz temelji na Eulerjevi formuli (10. poglavje).

Zdaj si poglejmo kromatična števila, ki smo jih spoznali pri Dinitzovem problemu.

- Erdõs, Rubin in Taylor so leta 1979 ugotovili, da ima vsak ravninski graf seznamsko kromatočno število $\chi_l(G) > 4$
- Margit Voigt je prva konstruirala primer ravninskega grafa G s $\chi_l(G) = 5$. Ta primer je imel 238 točk.
- V približno istem času pa je Carsten Thomassen podal dokaz za seznamsko barvanje s petimi barvami, v katerem sploh ne uporablja Eulerjeve formule.

IZREK : Vsak ravninski graf G lahko seznamsko pobarvamo s petimi barvami: $\chi_l(G) \leq 5$

DOKAZ:
Če je H podgraf grafa G, je $\chi_l(H) \leq \chi_l(G)$
Lahko predpostavimo, da je G povezan in da vsa notranja lica imajo obliko

trikotnika. Slika 2.
Veljavnost izreka za ta graf bo utemeljitev izreka za vse ravninske grafe. Vsak ravninski graf je pograf grafa, ki ga dobimo tako, da G trianguliramo.
Izrek bomo dokazali tako, da bomo dokazali močnejšo izjavo, ki nam dovoljuje uporabo indukcije:

LEMA: Naj bo $G = (V, E)$ tak graf, kot smo ga prej opisali. Naj bo B cikel, ki omejuje zunanje lice. Predpostavimo, da za množice barv $C(v), v \in V$, velja:

1. Dve sosednji točki $x, y \in B$ sta že pobarvani z različnima barvama α, β,
2. $|C(v)| \geq 3$ za vse ostale točke $v \in B$,
3. $|C(v)| \geq 5$ za vse ostale točke v v notranjosti.

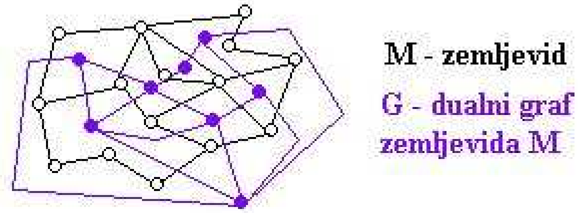
Potem lahko barvanje točk x in y razširimo na ustrezno barvanje grafa G z izbiro barv iz seznamov oziroma velja $\chi_l(G) \leq 5$.

DOKAZ: z indukcijo po n
Za $|V| = 3$ je to očitno, ker za edino nepobarvano točko v imamo $|C(v)| \geq 3$, torej obstaja prosta barva.
Nadaljujemo z indukcijo.

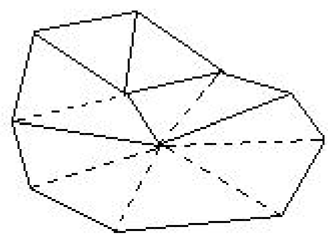
1.) Recimo, da ima B diagonalo oziroma povezavo, ki ni v B in povezuje dve točki u in v, ki sta v B. Slika 3.
Podgraf G_1, ki je omejen z $B_1 \cup uv$ in vsebuje x, y, u in v je oblike, ki je opisana zgoraj in zato ima pet seznamsko barvanje po indukciji. Recimo, da sta v tem barvanju točki u in v pobarvani z barvama γ in δ.
Zdaj poglejmo spodnji del, G_2 omejen z B_2 in uv. e na u in v gledamo kot na že pobarvani, vidimo, da indukcijska predpostavka velja tudi za G_2. Torej lahko G_2 seznamsko pobarvamo s peteimi barvami, s še preostalimi barvami. Torej sledi, da lahko G seznamsko pobarvamo s petimi barvami.

2.) Recimo, da B nima diagonale. Naj bo v_0 točka na drugi strani točke $x \in B$, x je pobarvana z α barvo. Naj bodo $x, v_1, ..., v_t, w$ sosednje točke od v_0. Glede na to, da je G δ - graf, si to lahko narišemo. Slika 4.
Zdaj konstruiramo $G' = G \setminus v_0$, tako da iz G vzamemo v_0 in vse njene povezave. Sedaj ima G' drugo mejo oziroma omejuje ga drugi cikel $B' =$

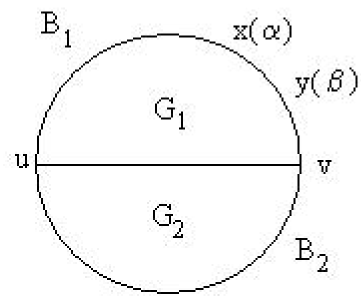
$(B \setminus v_0) \cup v_1, v_2, ..., v_t$. Ker $|C(v_0)| \geq 3$ (po predpostavki) obstajata dve barvi γ in δ v $C(v_0)$ različni od α. Zdaj nadomestimo vsako množico barv $C(v_0)$ z $C(v_i) \setminus \{\gamma, \delta\}$, pri čemer obdržimo prvotne množice barv za ostale točke v G'. Potem G' zadostuje vsem predpostavkam in je seznamsko pobarvljiv s petimi barvami po indukcijski predpostavki. Z izbisro δ ali γ za v_0 pa lahko razširimo seznamsko barvanje G' na cel G. $\square$



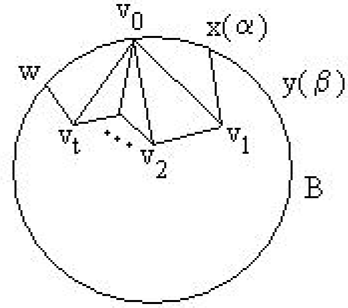
Slika 1: Zemljevid M in dualni graf G



Slika 2: Ravninski graf



Slika 3: Graf k dokazu pri točki 1.)



Slika 4: Graf k dokazu pri točki 2.)