Risanje grafov

Brigita Mastnak in Nina Lobe

18. 5. 2004

1 RISANJE GRAFOV

1.1 Ravninski grafi

Do sedaj smo se ukvarjali s področjem čiste ali abstraktne teorije grafov. To pomeni, da so točke elementi abstraktne množice in povezave so pari elementov te množice. Vsak, ki proučuje teorijo grafov, pa si predstavlja graf kot strukturo, kjer so točke pike in povezave črte. Zato je zelo prikladno gledati na graf kot na geometrijsko strukturo. V tem poglavju in naslednjih bomo delali na področju topološke teorije grafov. Tu pa je priporočljivo gledati na točke kot pike in na povezave kot črte v ravnini.

Graf je ravninski, če ga lahko narišemo v ravnini tako, da se nobeni dve povezavi ne ne sekata.

Ravninska slika oktaedra razdeli ravnino na osem trikotnikov. En trikotnik ima neskončno ploščino in tega imenujemo *zunanji* trikotnik. Do sedaj smo z izrazom trikotnik imeli v mislih graf K_3, zdaj pa bo K_3 le rob trikotnika. V splošnem bomo večkotnike, ki jih bodo tvorile povezave v sliki ravninskega grafa, imenovali *lica*. V kocki so to pravokotniki.
Poglejmo si lepe primere ravninskih grafov, ki smo jih do sedaj spoznali. Naj f označuje število lic v ravninskem grafu, n in m pa število točk in povezav. Poglejmo si tabelo:

	n	m	f
Tetraeder	4	6	4
Kocka	8	12	6
Oktaeder	6	12	8
Dodekaeder	20	20	12
Ikozaeder	12	30	20

Euler je leta 1750 ugotovil, da za te primere velja

$$n - m + f = 2.$$

Kasneje je ugotovil, da to velja za vse ravninske slike povezanih grafov (med vsakim parom točk najdemo pot).

Izrek 1 (Eulerjeva formula za poliedre). *Če ima ravninska slika povezanega grafa z n točkami in m povezavami f lic, potem velja*

$$n - m + f = 2.$$

Dokaz. Ta izrek dokažemo z matematično indukcijo po številu ciklov v grafu. Če povezan graf G nima ciklov, potem je drevo, $m = n - 1$ in v ravninski sliki grafa G je natanko eno lice. Potemtakem je $n - m + f = 2$.
Predpostavimo, da formula velja za vse ravninske slike povezanih grafov z manj kot k cikli. Imejmo ravninsko sliko grafa G z k cikli, n točkami, m povezavami in f lici in obravnavajmo en cikel C tega grafa. Po Jordanovem izreku C razdeli ravnino na notranjost in zunanjost. Naj bo e povezava v C. Ta povezava leži na dveh različnih licih. Eno je del zunanjosti, drugo pa del notranjosti.

Če odstranimo e, se bosta ti dve lici združili. Ravninska slika $G - e$ bo imela n točk, $m - 1$ povezav in $f - 1$ lic. Ker ima $G - e$ manj kot k ciklov, po predpostavki velja:

$$n - (m - 1) + (f - 1) = 2.$$

Ko odštejemo enice, dobimo formulo za G. □

Ravninski graf se imenuje *maksimalno ravninski*, če, ko dodamo povezavo med katerimakoli nesosednjima točkama, postane neravninski. Kocka ni maksimalno ravninski graf, ker lahko dodamo povezavo po diagonali v katerem koli kvadratnem licu, pa bo to še vedno ravninski graf. Oktaeder pa je maksimalno ravninski. Tudi K_4 je. V teh primerih so maksimalno ravninski grafi tisti, ki imajo trikotnike za lica. Tudi v splošnem to drži, saj vedno, kadar imamo območje z več kot tremi stranicami, lahko dodamo povezave med nesosednjimi točkami na robu teh lic in še vedno imamo ravninski graf.

Izrek 2 *Če je G maksimalno ravninski graf z n točkami in m povezavami, $n > 3$, potem je $m = 3n - 6$.*

Dokaz. Poglejmo planarno sliko grafa G z f lici. Vsako lice je obdano s tremi povezavami in vsaka povezava leži na dveh licih. To nam da enačbo $3f = 2m$. Da bi videli, da to drži, preštejemo na dva načina. Recimo, da preštejemo h parov (t, e), kjer je t trikotnik in e je povezava t-ja. Ker vsak trikotnik vsebuje tri povezave in je r trikotnikov, velja: $h = 3f$. Po drugi strani pa, ker je vsaka povezava na robu dveh trikotnikov in je povezav m, dobimo enakost: $h = 2m$. Sledi $f = \frac{2}{3}m$ in po izreku 1 sledi: $m = 3n - 6$. □

Naslednji izrek je neposredna posledica prejšnjega.

Izrek 3 *Ravninski graf z n točkami, $n \geq 3$, nima več kot $3n - 6$ povezav.*

Ta izrek nam pove, da ravninski graf, ki ima določeno število točk, ima omejeno število povezav.

Izrek 4 *Graf K_5 ni ravninski.*

Dokaz. Recimo, da K_5 je ravninski. Za K_5 je $n = 5$ in $m = 10$. Po izreku 3 je K_5 ravninski, če

$$10 \leq 3 \cdot 5 - 6,$$

kar pa ne drži. Zato K_5 ni ravninski. □

Dvodelni graf nima trikotnikov. Zato ravninski dvodelni graf ni nikoli maksimalno ravninski. Kocka pa je primer ravninskega dvodelnega grafa, v katerem dodajanje povezave med nesosednjimi točkami pripelje do ali neravninskega grafa ali ne dvodelnega ali pa oboje.

Izrek 5 *Če je G ravninski dvodelni graf z n točkami in m povezavami, $n \geq 3$, potem je $m \leq\ 2n - 4$.*

Dokaz. Dokaz je podoben dokazu izreka 2, le da zdaj ni trikotnik lice z najmanj robovi, ampak je to štirikotnik, tako da je $2m \geq 4f$. □

Izrek 6 *Polni dvodelni graf $K_{3,3}$ ni ravninski.*

Izrek 7 *Vsak ravninski graf vsebuje vsaj eno točko stopnje ≤ 5.*

Dokaz. Če izrek ne drži, potem obstaja ravninski graf G z n točkami in m povezavami in z vsako točko stopnje ≥ 6. Potem v G velja:

$$2m = \sum d(v) \geq 6n,$$

zato

$$m \geq 3n,$$

kar pa je v nasprotju z izrekom 3. □

Izrek 8 *Naj bo G maksimalen ravninski graf z n točkami in m povezavami, $n \geq 4$. Naj n_i označuje število točk stopnje i. Potem velja:*

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 = 12 + n_7 + 2n_8 + 3n_9 + 4n_{10} + ...$$

1.2 Izrek o štirih barvah

Na ravninsko sliko grafa lahko gledamo kot na zemljevid. Na zemljevidu se lica imenujejo *države*. Dve državi sta *sosednji*, če imata skupno povezavo.

Barvanje zemljevida M pomeni določanje barv vsaki državi zemljevida tako, da nobeni dve sosednji državi nista pobarvani z isto barvo. Spomnimo se, da sta dve povezavi sosednji natanko tedaj, ko imata skupno točko in da je barvanje povezav določanje barv povezavam tako, da nobeni dve sosednji povezavi nista pobarvani z enako barvo.

Izrek 9 (Tait, 1880). *Če za zemljevid obstaja barvanje držav s štirimi barvami, potem lahko povezave na zemljevidu pobarvamo s tremi barvami.*

Velja tudi obrat izreka, ki pa ga je dosti težje dokazati.

Izrek 10 (Tait). *Če lahko povezave na zemljevidu pobarvamo s tremi barvami, potem lahko države tega zemljevida pobarvamo z štirimi barvami.*

Izrek 11 *Če so na zemljevidu povezave primerno pobarvane s tremi barvami, potem lahko točke označimo z belo in črno barvo tako, da bo okoli vsake države število črnih točk minus število belih točk vedno večkratnik števila tri.*

Izrek 12 *Če na zemljevidu M velja, da lahko točke označimo z belo in črno barvo tako, da bo okoli vsake države število črnih točk minus število belih točk vedno večkratnik števila tri, potem lahko povezave zemljevida M pobarvamo s tremi barvami.*

Izrek 13 (Izrek o štirih barvah). *Vsak zemljevid lahko pobarvamo s štirimi barvami.*

Izrek 14 *V vsakem ravninskem kubičnem grafu brez mostu lahko povezave pobarvamo s tremi barvami.*

Izrek 15 *Točke vsakega maksimalnega ravninskega grafa z vsaj štirimi točkami lahko pobarvamo z največ štirimi barvami.*

Izrek 16 *Točke vsakega ravninskega grafa lahko pobarvamo z največ štirimi barvami.*

1.3 Izrek o petih barvah

Pogledali si bomo le barvanja normalnih zemljevidov v ravnini, kajti potem ni težko videti, da lahko tudi vse ostale ravninske zemljevide pobarvamo s petimi barvami.

Lema 17 *Noben zemljevid v ravnini nima pet paroma sosednjih lic.*

Dokaz. Če bi tak zemljevid obstajal, bi vseboval podgraf K_5, ampak K_5 ni ravninski, kot smo videli že prej. □

Izrek 18 *(Izrek o petih barvah). Lica vsakega normalnega zemljevida v ravnini lahko pobarvamo s petimi barvami.*

Dokaz. Pa predpostavimo nasprotno. Obstajati mora zemljevid, ki se ne da pobarvati s petimi barvami. Iz vseh teh zemljevidov izberimo tak zemljevid, ki ima namanj lic. Označimo ga z M.

a.) Privzemimo, da v M obstaja lice v obliki trikotnika.

Slika 1: Trikotna lica

Naj bo graf M' isti kot zemljevid M, le da trikotno lice nadomestimo s takim delom, kot je na sliki 1 druga slika. M' ima manj lic kot M in ga zato lahko pobarvamo s petimi barvami. V delu, ki je različen kot v zemljevidu M, se srečajo največ tri barve in zato, ko vrnemo izbrisano povezavo in dobimo trikotno lice, vidimo, da lahko pobarvamo tudi to s petimi barvami(kot na sliki 1). Torej, če M vsebuje trikotno lice, smo prišli do protislovja s tem, da se grafa M ne da pobarvati s petimi barvami.

c.) Privzemimo, da graf vsebuje štirikotno lice a. Lice a ima več kot dve sosednji lici.

Slika 2: Štirikotna lica

Na sliki 2 sta b in d različni ali pa c in e. Ker če to ne bi bilo res, razdelimo a na tri lica, kot v drugi sliki slike 2. Potem imamo pet skupnih sosed v ravninskem zemljevidu in po prejšni lemi, to ni mogoče. Privzemimo, da sta c in e različni. Poglejmo si graf M', ki naj bo enak M, izbrišemo le povezavo med a in c, kot na sliki 2. M' je še vedno regularen graf vendar z manj lici kot M in zato M' lahko pobarvamo s petimi barvami. Na tretji sliki 2 je pokazano barvanje M'. Ko povrnemo povezavo, ki smo jo izbrisali, imamo še eno barvo s katero lahko pobarvamo lice a. S tem smo prišli do protislovja, če M vsebuje štirikotno lice.

d.) Privzemimo, da graf vsebuje petkotno lice, ki je sosednje s petimi različnimi lici.

Slika 3: Petkotno lice, ki je sosednje s petimi različnimi lici

Torej mora obstajati par teh lic, ki nista sosednji. Ker če ne, bi imeli pet sosednjih lic, kar je nemogoče po lemi 1. Privzemimo, da b ni sosednje z d. Poglejmo si zemljevid M', ki se od M, razlikuje le po tem, da izbrišemo povezavi med a in b ter med a in d, kot na drugi sliki 3. M' ima manj lic kot M in ga zato lahko pobarvamo s petimi barvami. Tretja slika slike 3 nam prikazuje to barvanje. Pojavijo se le štiri barve, zato nam ostane barva za lice a. Torej, če smo privzeli, da M vsebuje petkotno lice, ki je sosednje petim različnim licem, pridemo do protislovja s tem, da M ni mogoče pobarvati s petimi barvami.

e.) Privzemimo, da zemljevid vsebuje petkotno lice, ki je sosednje s štirimi različnimi lici, kot na sliki 4.

Slika 4: Petkotno lice, ki je sosednje s štirimi različnimi lici

Obstajati mora par teh lic, ki nista sosednji, ker bi drugače a in ta štiri sosednja lica tvorila pet sosednjih lic v ravnini in s tem bi prišli do protislovja z lemo 1. Privzemimo, da b ni sosednja z d. Dokaz nadaljujemo kot v d.) primeru.

f.) Privzemimo, da zemljevid vsebuje petkotno lice, ki je sosednje s tremi različnimi lici kot na sliki 5. Če razdelimo a na dve lici a_1 in a_2, imamo pet sosednjih lic, kar je nemogoče po lemi 1. Zato M ne vsebuje takšnega lica.

S tem smo pokazali, da zemljevid M ne vsebuje manjšega lica kot s šestimi točkami. Naj ima M n točk, m povezav in f lic. Vsaka točka je stopnje 3, velja $3n = 2m$. Vsako lice ima vsaj šest povezav in vsaka povezava leži v dveh licih, zato velja

$$2m \geq 6f.$$

Po enem prejšnjih izrekov velja tudi

$$6f = 2m + 12.$$

Iz tega dobimo

$$2m < 6f,$$

Slika 5: Petkotno lice, ki je sosednje s tremi različnimi lici to pa je protislovje. Torej zemljevid M ne obstaja in izrek je dokazan. □

1.4 Grafi in geometrija

Izrek 19 *(Wagner). Vsak ravninski graf lahko narišemo v ravnino tako, da je vsaka povezava ravna črta.*

Če imamo končno množico krožnic v ravnini, ki se ne sekajo, rečemo tem krožnicam *kovanci.* Konstruirajmo graf tako, da ima vsak kovanec eno točko in dve točki sta sosednji, samo če se kovanca dotikata. Če lahko graf konstruiramo tako, potem rečemo, da je to *graf kovancev.*

Domneva 20 *Vsak ravninski graf je graf kovancev.*

Če je domneva resnična, jo verjetno težko dokazati, če pa ni obstaja en tak protiprimer, ki je verjetno zelo kompleksen.