SEMINARSKA NALOGA PRI KOMBINATORIKI

Simona Verdinek

1.4.2003

Poglavje 1

TRIJE ZNAMENITI IZREKI NA KONČNIH MNOŽICAH

1.1 UVOD

V tem poglavju se bomo posvetili glavnim temam kombinatorike:
lastnosti in velikosti posebnih družin F, katerih elementi so podmnožice končne množice $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Začeli bomo z dvema rezultatoma, ki sta značilna za to področje:
izrek Spernerja in Erdos-Ko-Rado. Ta dva rezultata imata skupnega to, da sta bila dokazana večkrat in vsak od teh dokazov načenja novo področje kombinatorike na množicah.
Pri obeh izrekih indukcija izgleda najbolj naravna metoda za dokaz, toda dokaz, ki ga bomo mi naredili, je drugačen in resnično navdihujoč.

1.2 IZREK SPERNERJA

Imamo množico $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ Pravimo, da je družina F podmnožic množice N **ANTIVERIGA**, če nobena množica iz F ni vsebovana v kakšni drugi množici iz F.
Primer: $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$
Množice $X_1 = \{2, 3, 4\}$, $X_2 = \{1, 4, 5\}$ in $X_3 = \{1, 5, 6\}$ tvorijo antiverigo.
Kaj pa vse 2-podmnožice množice A?

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
\{1,2\}, & \{1,3\}, & \{1,4\}, & \{1,5\}, & \{1,6\}, & \{1,7\}, & \{1,8\}, & \{1,9\}, & \{1,10\}, \\
 & \{2,3\}, & \{2,4\}, & \{2,5\}, & \{2,6\}, & \{2,7\}, & \{2,8\}, & \{2,9\}, & \{2,10\}, \\
 & & \{3,4\}, & \{3,5\}, & \{3,6\}, & \{3,7\}, & \{3,8\}, & \{3,9\}, & \{3,10\}, \\
 & & & \{4,5\}, & \{4,6\}, & \{4,7\}, & \{4,8\}, & \{4,9\}, & \{4,10\}, \\
 & & & & \{5,6\}, & \{5,7\}, & \{5,8\}, & \{5,9\}, & \{5,10\}, \\
 & & & & & \{6,7\}, & \{6,8\}, & \{6,9\}, & \{6,10\}, \\
 & & & & & & \{7,8\}, & \{7,9\}, & \{7,10\}, \\
 & & & & & & & \{8,9\}, & \{8,10\}, \\
 & & & & & & & & \{9,10\}.
\end{array}$$

Kot vidimo, nobena množica ni vsebovana v kakšni drugi množici, torej tvorijo antiverigo.
Kaj pa 3-podmnožice? Tudi te tvorijo antiverigo. Torej vse k-podmnožice množice A tvorijo antiverigo za $1 \leq k \leq 10$.

Naj bo $N = \{1, ..., n\}$. Kakšna je velikost največje antiverige?
Jasno je, da je velikost družine F_k vseh k-podmnožic, ki zadošča lastnosti antiverige, enaka

$$\binom{n}{k}.$$

Kdaj pa bo moč množice F_k največja? Takrat, ko bo

$$\binom{n}{k}$$

maksimalen.
Za kateri k pa je ta binomski koeficient maksimalen?
Iz Pascalovega trikotnika vidimo, da:
če je $n = 0$, je

$$\binom{0}{0}$$

maksimalen,
če je $n = 1$, sta

$$\binom{1}{0}$$

in

$$\binom{1}{1}$$

maksimalna,
če je $n = 2$, je

$$\binom{2}{1}$$

maksimalen,
če je $n = 3$, sta

$$\binom{3}{1}$$

in

$$\binom{3}{2}$$

maksimalna, itd.

Vidimo, da je binomski koeficient za sode n največji takrat, ko je $k = \frac{n}{2}$, za lihe n pa takrat, ko je $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ali $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
Torej, prišli smo do zaključka, da je binomski koeficient

$$\binom{n}{k}$$

maksimalen, če je $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Spernerjev izrek pa nam zagotavlja, da ni večje antiverige.

IZREK SPERNERJA 1928**:**
VELIKOST NAJVEČJE ANTIVERIGE NA N-MNOŽICAH JE ENAKA

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

DOKAZ:
Izmed veliko dokazov je naslednji najbolj eleganten in najkrajši.
Naj bo $N = \{1, ..., n\}$ in F poljubna neveriga. Pokazati moramo, da je $|F| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.
Trik tega dokaza je, da skonstruiramo verigo podmnožic:
$\emptyset = C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset ... \subset C_n = N$; kjer je $|C_i| = i$ za $i = 0, 1, ..., n$
Koliko takšnih različnih verig lahko skonstruiramo?

C_1 ima en element, ki ga lahko izberemo izmed n elementov, torej imamo n možnosti. C_2 vsebuje C_1 in še en element, ki ga pa lahko izberemo izmed preostalih n-1 elementov. Za C_3 izberemo element izmed preostalih n-2 elementov in tako naprej.
Torej vseh verig je n!.
Nadalje se za množico $A \in F$ vprašamo, koliko teh verig vsebuje množico A?
A je torej člen verige $\oslash = C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset ... \subset A \subset ... \subset C_n = N$
Naj ima A k elementov, npr. $\{1, \ldots, k\}$. Torej do A moramo verigo zgraditi iz elementov $\{1, \ldots, k\}$. Torej imamo k! možnosti. Verigo od A pa do C_n pa zgradimo iz preostalih n-k elementov. Vseh takih možnosti je (n-k)!
Torej takšnih verig, ki vsebujejo A, je k!(n-k)!.
Naj bo B neka druga množica iz F. Potem nobena veriga, ki vsebuje A, ne vsebuje B.
Če bi neka veriga vsebovala tako A kot B, potem bi moralo veljati, da je $A \subset B$ ali $B \subset A$, to pa je nemogoče, saj je F antiveriga.

Naj bo m_k število k-množic iz množice F. Potem je $|F| = \sum_{k=0}^{n} m_k$.

Torej je število verig, če gremo po vseh množicah iz F, enako
$\sum_{k=0}^{n} m_k k!(n-k)!$.
Ker pa smo prej videli, da je število različnih verig enako n!, je potem
$\sum_{k=0}^{n} m_k k!(n-k)! \leq n! \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{n} m_k \frac{k!(n-k)!}{n!} \leq 1 \;\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n} m_k \frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leq 1$$

Če

$$\binom{n}{k}$$

nadomestimo z maksimalnim binomskim koeficientom

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

dobimo še manj, torej je

$$\frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \sum_{k=0}^{n} m_k \leq 1 \Rightarrow |F| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

S tem smo dokaz končali.

$\square$

V bistvu je za sode n družina vseh $\frac{n}{2}$ - množic edina antiveriga, ki doseže maksimum, če pa je n lih, potem pa sta družini vseh $\frac{n+1}{2}$ - množic in $\frac{n-1}{2}$ - množic edini antiverigi, ki dosežeta maksimalni velikost.