Seminarska naloga pri kombinatoriki
Grafi. Spernerjeva lema.

Mojca Kosi, Mojca Harb

11.3.2003

Grafi

Naj bo G končen enostaven graf z množico točk V(G) in množico povezav E(G). d(v) je **stopnja točke** v (moč množice sosednjih točk oz. število povezav, v katerih se nahaja točka v).

PRIMER (Glej graf 1)
Točke 1, 2, 3, ..., 7 imajo naslednje stopnje točk: 3, 2, 4, 3, 3, 2, 3.

Skoraj vsaka knjiga iz teorije grafov začne z naslednjim rezultatom:

Osnovna lema teorije grafov

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E(G)|$$

Dokaz:
Vpeljimo relacijo $S \subset V\text{x}E$, kjer je S množica parov (v, e), pri čemer so $v \in V(G)$ točke grafa G in $e \in E(G)$ povezave.

$$(S)_{i,j} = \begin{cases} 1; v_i \in e_i \\ 0; sicer \end{cases}$$

Preštejmo število enic na dva načina:

$$\sum_{po.vrsticah} = \sum_{v_i \in V} d(v_i)$$

$$\sum_{po.stolpcih} = 2|E(G)|$$

(ker ima vsaka povezava dve krajišči.)

Osnovna lema teorije grafov ima veliko pomembnih posledic. Zdaj bomo izpostavili naslednji problem:
Predpostavimo, da graf $G = (V(G), E(G))$ z n točkami (t.j. $|V(G)| = n$) ne vsebuje nobenega cikla dolžine 4 (kar označimo s C 4).

Kolikšno je največje možno število povezav grafa G?

Primer (glej graf 2)
Graf na petih točkah ne vsebuje nobenega 4-cikla in ima 6 povezav. Zlahka opazimo, da je na petih točkah maksimalno število povezav, ki nimajo nobenega 4-cikla, enako 6 .

Osredotočimo se na naš problem:
Naj bo G graf z močjo množice točk enako n, ki ne vsebuje nobenega 4-cikla. Z d(u) označimo stopnjo točke u. Naj bo S množica parov (u, {v, w}), kjer je u sosedna točka v in w ter $v \neq w$ (glej Graf 3).

Zanima nas število takih povezav na grafu G. Z drugimi besedami: izračunajmo moč množice S in sicer na dva načina:

Seštejmo vse pare glede na u:

$$|S| = \sum_{v \in V} \binom{d(u)}{2}$$

Po drugi strani pa ima vsak par {v, w} največ eno skupno sosedno točko (ker graf ne sme vsebovati nobenega 4-cikla), zato je:

$$|S| \leq \binom{n}{2}$$

Torej lahko sklepamo:

$$\sum_{v \in V} \binom{d(u)}{2} \leq \binom{n}{2}$$

$$\sum_{u \in V} \binom{d(u)}{2} \leq \binom{n}{2}$$

$$\sum_{u \in V} \frac{d(u)(d(u)-1)}{2} \leq \frac{n(n-1)}{2} / 2$$

$$\sum_{u\in V}(d(u)^2) - \sum_{u\in V} d(u) \leq n(n-1)$$

Dobljeno neenakost lahko zapišemo tudi takole:

(1)

$$\sum_{u\in V} d(u)^2 \leq n(n-1) + \sum_{u\in V} d(u)$$

Sedaj lahko uporabimo Cauchy-Schwartzovo neenakost za vektorja $(d(u_1), ..., d(u_n))^T$ ter $(1, ..., 1)^T$ in dobimo:

$$(|(d(u_1), ..., d(u_n))^T (1, .., 1)^T|^2 \leq (d(u_1), ..., d(u_n))^T (d(u_1), ..., d(u_n))^T (1, ..., 1)^T (1, ..., 1)^T$$

$$(\sum_{u\in V} d(u)) \leq n \sum_{u\in V} d(u)^2$$

in zato po neenakosti (1) velja:

$$(\sum_{u\in V} d(u))^2 \leq n^2(n-1) - n \sum_{u\in V} d(u)$$

Z upoštevanjem osnovne leme teorije grafov dobimo:

$$4|E|^2 \leq n^2(n-1) + 2n|E|$$

oziroma:

$$|E|^2 - \frac{n}{2} - \frac{n^2(n-1)}{4} \leq 0$$

Če rešimo to kvadratno enačbo, dobimo naslednji Riemannov rezultat:

$$4|E|^2 - 2n|E| - n^2(n-1) = 0$$

$$|E|_{1,2} = \frac{2n \pm \sqrt{4n^2 + 16n^2(n-1)}}{8}$$

$$|E|_{1,2} = \frac{2n \pm \sqrt{4n^2(1 + 4(n-1))}}{8}$$

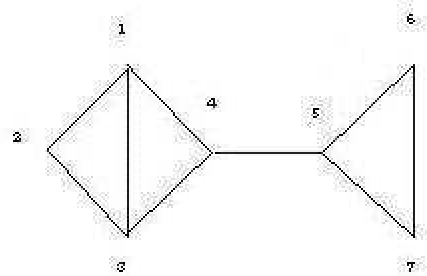
$$|E|_{1,2} = \frac{2n \pm 2n\sqrt{1 + 4(n-1)}}{8}$$

$$|E| = \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3})$$

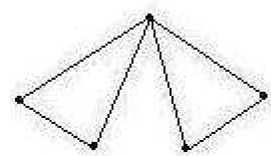
Izrek:
Če graf G na n točkah ne vsebuje nobenega 4-cikla, potem velja:

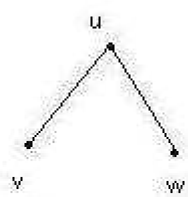
$$|E| \leq \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n - 3})$$

Za n = 5 nam izrek pove, da je $|E| \leq 6$. Iz grafa 2 spodaj vidimo, da to res drži.

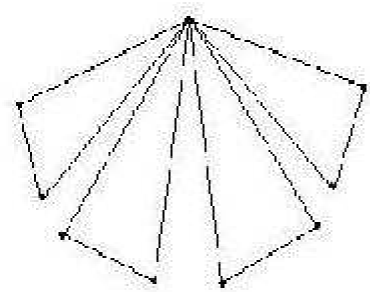


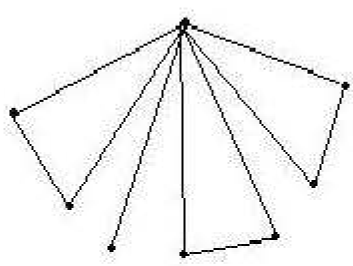
Graf 1


Graf 2



Graf 3


Graf 4


Graf 5

Primer 1 (Glej graf 4)
Imamo graf na devetih točkah z 12 povezavami.

$$|E| \leq \frac{9}{4}(1+\sqrt{49-3})$$
$$|E| \leq \frac{9}{4}(1+\sqrt{33})$$
$$|E| \leq 15$$

Vemo, da ima graf 12 povezav, to pa je res manj kot 15.

Primer 2 (Glej graf 5)
Imamo graf na osmih točkah z desetimi povezavami.

$$|E| \leq \frac{8}{4}(1+\sqrt{48-3})$$
$$|E| \leq 2(1+\sqrt{29})$$
$$|E| \leq 12$$

Vemo, da ima ta graf deset povezav, to pa je res manj kot 12.

Spernerjeva lema

Leta 1917 je Luitzen Brouver objavil svoj znani **izrek o fiksni točki:**

Vsaka zvezna funkcija $f : B^n \to B^n$ iz n dimenzionalne krogle vase ima fiksno točko (t.j.: obstaja točka x iz B na n, za katero velja: f(x) = x.

Za prostor dimenzije 1 (to je za interval), je dokaz preprost, toda za višje dimenzije je Brouver potreboval kar nekaj zahtevnejših sofisticiranih pripomočkov.
Leta 1928 je zato bilo pravo presenečenje, ko je Emanuel Sperner (23 let) prišel do preprostega kombinatoričnega rezultata, iz katerega je takoj sledil Brouvnerjev izrek o fiksni točki.
In še več: Spernerjeva lema ima tudi zelo preprost dokaz: gre za štetje parov. Spernerjevo lemo in Brouverjev izrek kot njeno posledico si bomo ogledali na primeru, ko je dimenzija n = 2. Z indukcijo po dimenzijah pa lahko izrek dokažemo tudi za višje dimenzije.

Spernerjeva lema
Predpostavimo, da imamo triangulacijo z vrhovi V_1, V_2, in V_3 (t.j. imamo trikotnik $V_1V_2V_3$, ki je sestavljen iz končnega števila manjših trikotnikov, ki so med seboj zlepljeni v robovih).Glej graf 6.

Privzemimo, da ima vsak vrh triangulaciji barvo iz množice $\{1, 2, 3\}$, tako da vrh V_i prejme barvo i (za vsak i). Pri tem upoštevamo še to, da sta vzdolž roba od V_i do V_j (za $i \neq j$) zastopani le barvi i in j, notranji vrhovi pa so poljubno pobarvani z barvami 1, 2 ali 3.
Potem obstaja v naši triangulaciji trobarven trikotnik (t.j. trikotnik, ki ima vsak vrh drugačne barve).

Dokaz:
Dokazali bomo splošnešo trditev: število trobarvnih trikotnikov ni samo neničelno, temveč je vedno tudi liho.
Vzemimo dualni graf naše triangulacije; vendar ne upoštevajmo vseh povezav tega grafa, temveč le tiste, ki sekajo robove, katerih končni točki (vrhova) sta obarvana z barvo 1 ali 2 in sta različne barve. Glej graf 7.

S tem smo dobili parcialni dualni graf. Točke tega grafa so:
- stopnje 1, če so to točke iz notranjosti trobarvnih trikotnikov
- stopnje 2, če so to točke iz trikotnikov, v katerih se pojavita le barvi 1 in 2
- stopnje 0, če trikotnik na vsebuje obeh barv (1 in 2) hkrati

Torej: samo točke znotraj trobarvnih trikotnikov so lihe stopnje. Tudi vrh dualnega grafa, ki ustreza zunanjosti triangulacije, je lihe stopnje (v našem primeru je stopnje 3). Od tod lahko sklepamo, da imamo vzdolž roba od V_1 do V_2 liho število sprememb barve med 1 in 2. Zato lahko zaključimo, da liho

število povezav dualnega grafa seka rob triangulacije (saj robova V_1V_3 in V_2V_3 ne moreta hkrati vsebovati barv 1 in 2).
Po enem izmed prejšnjih izrekov je število lihih vrhov v vsakem končnem grafu sodo. Od tod sledi, da je število vseh trobarvnih trikotnikov liho.

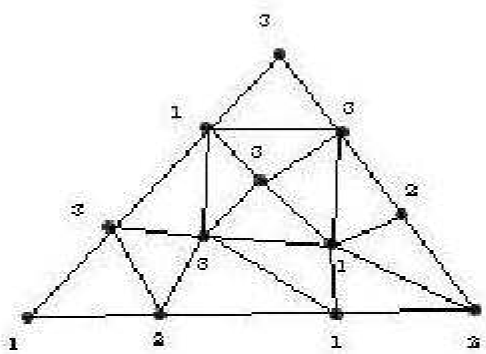
Dokaz izreka o fiksni točki (za n=1 in n =2):

Prostor dimenzije n=1 (interval): Imamo zvezno preslikavo iz intervala $[0,1]$ vase (glej graf 8). Graf te preslikave nujno vsaj enkrat seka (ali se dotika) premice $y = x$. Za to točko potem velja: $f(x) = x$, torej je to fiksna točka te preslikave.

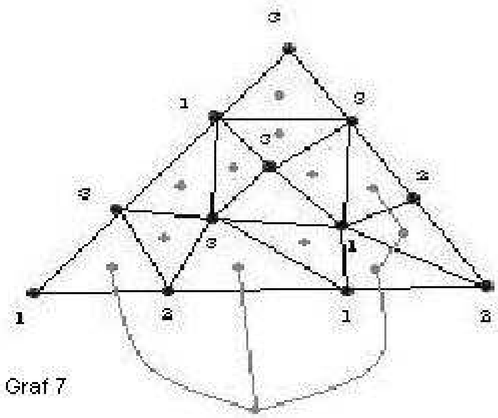
Prostor dimenzije n=2: Označimo z Δ trikotnik v $\mathbf{R}^3$ z vrhovi $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ in $e_3 = (0,0,1)$.
Zadostuje dokazati, da ima vsaka zvezna preslikava $f : \Delta \to \Delta$ fiksno točko, ker je Δ homeomorfen dvodimenzionalni krogli $B_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$

Z $\delta(T)$ označimo maksimalno dolžino roba v triangulaciji T. Sedaj lahko na preprost način skonstruiramo neskončno zaporedje triangulacij Δ: T_1, T_2,..., tako, da zaporedje maksimalnih diametrov $\delta(T_k)$ konvergira proti 0.
Takšno zaporedje lahko eksplicitno skonstruiramo ali ga induktivno dobimo tako, da npr. vzamemo $T_k + 1$ kot baricentrično poddelitev T_k.
Za vsako od teh triangulacij definirajmo barvanje s tremi barvami njenih vrhov s postavitvijo: $\lambda(v) := min\{i : f(v)_i < v_i\}$, tj. $\lambda(v)$ je najmanjši indeks i, za katerega je i-ta koordinata izraza $(f(v) - v)$ negativna.
Predpostavimo, da f nima fiksnih točk.
Vsak $v \in \Delta$ leži v ravnini $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, torej je $\sum_i v_i = 1$. Zato je $f(v) \neq v$. Potem pa mora biti vsaj ena koordinata negativna (in vsaj ena koordinata je pozitivna).
Preverimo, da naše barvanje zadošča predpostavkam Spernerjeve leme. Najprej mora biti vrh e_i obarvan z barvo i, ker je edina možna negativna komponenta $f(e_i) - e_i$ i-ta komponenta. Še več: če v leži na robu nasproti e_i, potem je $v_i = 0$, torej i-ta komponenta $f(v) - v$ ne more biti negativna in zato v ni obarvan z barvo i.
Spernerjeva lema nam sedaj pove, da v vsaki triangulaciji T_k obstaja trobarven trikotnik $\{v^{k:i}, v^{k:2}, v^{k:3}\}$, za katerega velja: $\lambda(v^{k:i}) = i$.
Zaporedje točk $(v^{k:1})_{k\geq 1}$ ni nujno konvergentno, vendar ker je Δ kompakten, obstaja podzaporedje, ki ima limitno točko.
Če zaporedje triangulacij T_k zamenajmo z ustreznim podzaporedjem (ki ga zaradi enostavnosti prav tako označimo s T_k), lahko privzamemo, da $(v^{k:1})_k$ konvergira k točki $v \in \Delta$. Zdaj je razdalja med $v^{k:3}$ ter $v^{k:2}$ in $v^{k:1}$ manjsa od dolžine $\delta(T_k)$, ki konvergira k 0. Torej zaporedji $(v^{k:2})_k$ in $(v^{k:3})_k$ konvergirata k isti točki v.
Toda kaj sploh je f(v)? Vemo, da je prva koordinata $f(v^{k:1})$ manjša kot $v^{k:1}$ za

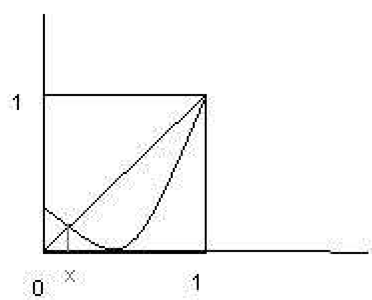
vsak k. Ker je f zvezna funkcija, je prva koordinata f(v) manjša ali enaka prvi koordinati v. Enako razmislimo še za drugo in tretjo koordinato. Torej nobena od koordinat $f(v) - v$ ni pozitivna. To pa je v nasprotju za našo predpostavko, da je $f(v) \neq v$.



Graf 6



Graf 7



Graf 8