Število označenih dreves

seminarska naloga

Nina Peršin, Matjaž Kovše

8. april 2003

1 Opis problema

V tej seminarski nalogi je obravnavam problem štetja dreves. Število označenih dreves obravnava *Cayleyev izrek* oziroma *Cayleyeva fomula*. Podanih je 5 različnih dokazov. Od tega sta si prva dva zelo podobna, medtem ko naslednji trije prinašajo tri zanimive posplošitve. Za ponazoritev nam služi nekaj primerov, od katerih je še posebej zanimiv primer, ki obravnava minimalno množico transpozicij podane množice permutacij. Na koncu je omenjen tudi problem štetja neoznačenih dreves, ki še vedno ni v celoti rešen, saj je še vedno znana le rodovna funkcija za število neoznačenih dreves, ne pa tudi kaka eksplicitna formula, kot je to v primeru števila označenih dreves.

Problem štetja označenih dreves se je prvič pojavil v 18. stoletju v člankih Arthura Cayleya, ki se je ukvarjal s študijem dreves s koreni v povezavi z diferencialnim računom in kasneje s problemom, kako prešteti število alkanov s podanim številom ogljikovih atomov.[1].Spodnji izrek je bil popolnoma dokazan šele kasneje, po prvi objavi v Cayleyevem članku[2].

N naj v nadaljevanju označuje množico prvih n naravnih števil, torej $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Koliko je različnih dreves, ki imajo za množico točk množico N? Odgovor na to vprašanje podaja naslednji izrek.

Izrek 1 (Cayley, 1889) . *Število označenih dreves z n točkami je n^{n-2}.*

Predvsem v preteklem stoletju je bilo podanih veliko različnih dokazov. Nekateri med njimi skrivajo zanimive ideje in posplošitve.

2 Prüferjeve kode

Obstaja cela družina "Prüfer like Codes", ki se razlikujejo glede na lastnosti, ki so zanimive za uporabo v teoriji grafov ali v računalniških znanostih. Več o tem je možno najti v [5]. Pa si poglejmo tako imenovano **Prüferjevo konstrukcijo**.

[1]problem je iz organske kemije in obravnava število različnih izomerov določene ogljikove spojine; alkani so ogljikovodiki z atomsko formulo C_nH_{2n+2}

[2]veliko zanimivih detajlov iz razvoja teorije grafov je možno najti v [3],med drugim tudi odlomek iz Cayleyevega članka in Prüferjev članek

V nadaljevanju opisan postopek je povzet po [13].

Veliko problemov (npr: koliko namakalnih sistemov, ki povezujejo pet lokacij s štirimi kanali obstaja,) lahko prevedemo na vprašanje, koliko je dreves z neko lastnostjo.

V splošnem so problemi preštevanja označenih grafov enostavnejši kot ustrezni problemi za neoznačene grafe: v nekaterih primerih je prvi problem rešen, drugi pa še vedno ne.

Problem štetja označenih kot tudi neoznačenih dreves je rešen, vendar je štetje označenih dreves precej lažji problem.

Da si lahko pogledamo dokaz Prüferja, ki uporablja konstrukcijo povratne enolične preslikave med označenimi drevesi z n točkami in zaporedji n-2 števil, bomo najprej opisali Prüferjevo konstrukcijo. Pri tem privzemimo, da je n 3, saj trditev velja za n=1 in 2.

Prüferjeva konstrukcija:

Napisali bomo povratno enolično preslikavo med množico označenih dreves z n točkami in množico vseh zaporedij oblike $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$, kjer je vsako od števil a_i eno od $1, 2, \ldots, n$. (dovoljene so tudi ponovitve).

Izvajali bomo tri korake:

1. Med točkami stopnje 1 izberimo tisto z najmanjšo oznako

2. Vzemimo točko, ki je sosednja tej izbrani, ter postavimo njeno oznako na prvo mesto zaporedja.

3. Odstranimo točko, izbrano v prvem koraku.

Korake od 1 do 3 ponavljamo na dobljenem drevesu, dokler ne ostaneta samo dve točki.

Dobljenemu zaporedju pravimo Prüferjevo zaporedje.

Sedaj pa želimo Prüferjevemu zaporedju prirediti označeno drevo, in sicer spet v 3 korakih:

1. Narišemo n točk, ter jih označimo s števili od 1 do n in napišemo seznam števil od 1 do n.

2. Poiščemo najmanjše število, ki je v seznamu in ga ni v Prüferjevem zaporedju, ter vzamemo prvo števili iz zaporedja in povežemo točki s tema oznakama.

3. Odstranimo števili iz prejšnjega koraka iz seznama in iz zaporedja, ter na manjši seznam in krajše zaporedje.

Ponavljamo koraka 2 in 3 , dokler ne ostaneta samo dve oznaki v seznamu in povežemo še točki s tema oznakama.

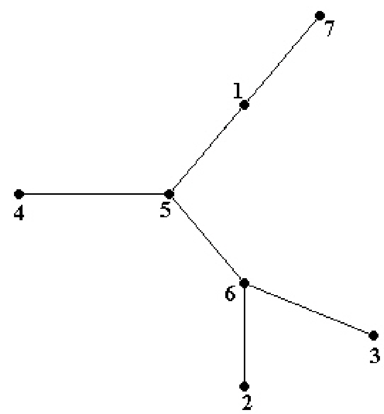
PRIMER
Zapiši Prüferjevo zaporedje, za označeno drevo:

1. Točke 2,3,4,7 so stopnje 1 in najmanjšo oznako ima točka 2.
2. Sosednja točka točki 2 je 6, torej je prvi člen zaporedja 6.
3. Odstranimo točko 2 in povezavo 26.

1. Točke 3,4,7 so stopnje 1 in najmanjšo oznako ima točka 3.
2. Njena sosednja točka je točka 6 in je drugi člen zaporedja enak 6.
3. Odstranimo točko 3 in povezavo 36 .

1. Točki 4,6 in 7 sta stopnje 1 in izberemo točko 4.
2. Njena sosednja točka je 5, torej je tretji člen zaporedja 5.
3. Izbrišemo točko 4 in povezavo 45.

1. Točki 6 in 7 sta stopnje 1,ter izberemo 6.
2. Njena sosednja točka je 5, torej je četrti člen zaporedja 5.



Slika 1: Označeno drevo s 7 točkami

3. Izbrišemo točko 6 in povezavo 65.

1. Točki 5, 7 sta stopnje 1 in izberemo 5.
2. Njena sosednja točka je 1, in peti člen zaporedja je 1.
3. Izbrišemo 5 in povezavo 51.

Ostali sta le še točki 1 in 7.

Prüferjevo zaporedje: (6,6,5,5,1).

Poglejo še kako iz Prüferjevega zaporedja dobimo označeno drevo: (6,6,5,5,1)

1. V zaporedju je 5 števil, torej bomo imeli 7 točk. Napišemo seznam (1,2,3,4,5,6,7) in narišemo točke:

2. Najmanjše število, ki je na seznamu in ga ni v zaporedju je 2. Prvo število v zaporedju je 6 in povežemo točki 2 in 6.

3. Odstranimo število 2 iz seznama in 6 iz zaporedja in dobimo zaporedje (6,5,5,1) in seznam: (1,3,4,5,6,7).

Nadaljujemo s postopkom:

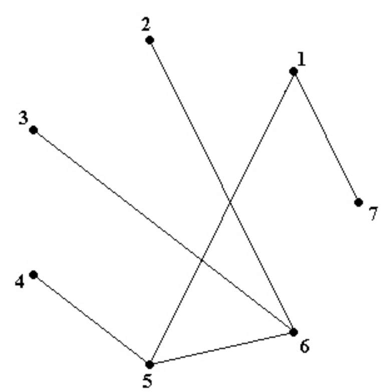
2. Najmanjše število, ki je na seznamu in ga ni v zaporedju je 3. Prvo število v zaporedju je 6 in povežemo točki 3 in 6.
3. Odstranimo število 3 iz seznama in 6 iz zaporedja in dobimo zaporedje (5,5,1) in seznam: (1,4,5,6,7).

2. Najmanjše število, ki je na seznamu in ga ni v zaporedju je 4. Prvo število v zaporedju je 5 in povežemo točki 4 in .
3. Odstranimo število 4 iz seznama in 5 iz zaporedja in dobimo zaporedje (5,1) in seznam: (1,5,6,7).

2. Najmanjše število, ki je na seznamu in ga ni v zaporedju je 6. Prvo število v zaporedju je 5 in povežemo točki 6 in 5.
3. Odstranimo število 6 iz seznama in 5 iz zaporedja in dobimo zaporedje (1) in seznam: (1,5,7).

2. Najmanjše število, ki je na seznamu in ga ni v zaporedju je 5. Prvo število v zaporedju je 1 in povežemo točki 1 in 5.

Tako nam ostane seznam (1,7) in povežemo še ti dve točki.
Tako smo dobili ustrezno označeno drevo:



Slika 2: Označeno drevo s Prüferjevo kodo (6,6,5,5,1)

Dokaz: Konstruiramo bijekcijo med množico označenih dreves z n točkami in množico vseh zaporedij oblike $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$, kjer je vsako od števil a_i

eno od $1, 2, \dots, n$ (z dovoljenimi ponovitvami). Ker je za vsako od števil a_i natanko n možnih vrednosti, je vseh možnih zaporedij ravno n^{n-2}.

$\square$

Obstaja tudi posplošitev algoritma za Prüferjeve kode za gozdove. Glej na primer [12].

3 Še en dokaz z uporabo bijekcije

Podobno idejo kot pri prejšnjem dokazu bomo uporabili tudi v tem poglavju. V prejšnjem dokazu smo poiskali bijekcijo med množico vseh označenih dreves in množico vseh urejenih zaporedij oblike $(a_1, \dots, a_{n-2})$, kjer je $1 \leq a_i \leq n$. V splošnem gledamo včasih na zaporedja kot na preslikavo iz neke množice naravnih števil v neko drugo množico. V tem pogledu je tudi skrita ideja naslednjega dokaza.

Kot bomo to še storili v nadaljevanju[3] posebej obravnavajmo dve točki drevesa, njuna izbira naj bo poljubna. Z $\bigcirc$ označimo *levi konec* in z $\square$ *desni konec*, ki lahko tudi sovpadata. Naj bo $\mathcal{T}_n = \{(t; \bigcirc, \square)\}$ ta nova množica. Vsak levi in desni konec lahko izberemo na n načinov, torej velja $|\mathcal{T}_n| = n^2 T_n$.

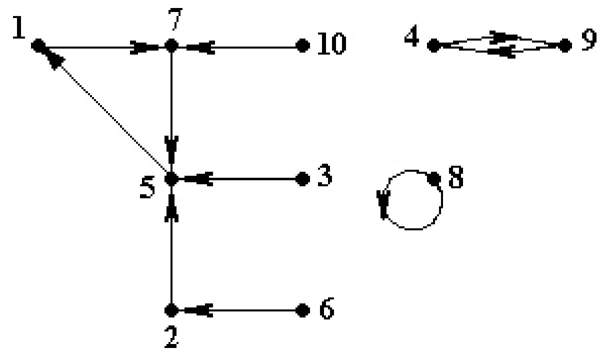
V nadaljevanju bomo dokazali $|\mathcal{T}_n| = n^n$, iz česar bo, po zgornjem razmisleku sledil Cayleyev izrek. Poiskali bomo torej množico katere moč je n^n. Možna izbira je množica vseh preslikav iz množice prvih n naravnih števil samo vase N^N. Poiskali bomo torej bijekcijo iz N^N v $\mathcal{T}_n$.

Poljubno preslikavo $f:\ N \rightarrow\ N$ lahko predstavimo z usmerjenim grafom oziroma digrafom $\vec{G}_f$ tako, da narišemo povezave iz točke i v točko $f(i)$. Kot primer si poglejmo naslednjo preslikavo:

$$f = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10 \\ 7\;\,5\;\,5\,9\,1\,2\,5\,8\,4\;\,7\;\, \end{pmatrix}$$

Predstavlja jo digraf na sliki 3.

[3]glej točko 6



Slika 3: Digraf $\vec{G}_f$ preslikave f

Poglejmo si posamezne komponente $\vec{G}_f$. Iz vsake točke izhaja natanko ena povezava. To pa pomeni, da ima komponenta enako število točk in povezav. Iz tega sledi, da vsaka komponenta premore natanko en usmerjen cikel. Naj bo množica $M \subset N$ unija množic točk teh ciklov. Iz definicije množice M sledi, da je M enolično določena maksimalna podmnožica množice N, z lastnostjo, da je zoožitev funkcije f na množico M bijekcija na M. Označimo z $f|_M = \begin{pmatrix} a & b & \dots & z \\ f(a) & f(b) & \dots & f(z) \end{pmatrix}$, kjer $a, b, \dots, z$ razporejene v naraščajočem vrstnem redu. Tako dobimo razporeditev $f(a), f(b), \dots, f(z)$ iz M glede na prvo vrstico. Točko $f(a)$ imenujmo *levi konec*, točko $f(z)$ pa *desni konec*.

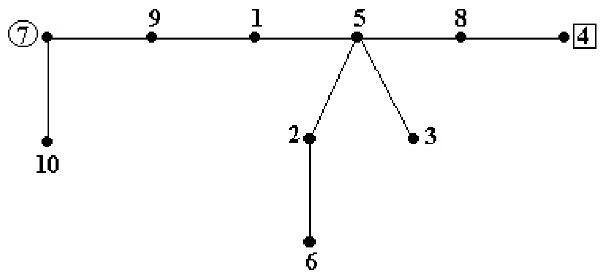
Pripadajoče drevo konstruiramo takole: Narišemo točke $f(a), f(b), \dots, f(z)$ v tem vrstnem redu kot *pot* iz $f(a)$ v $f(z)$. Ostale točke povežemo (neusmerjeno) kot v grafu $\vec{G}_f$.

Množico M v našem primeru predstavlja množica $\{1, 4, 5, 7, 8, 9\}$, zoožitev na M je

$$f_M = \begin{pmatrix} 1\,4\,5\,7\,8\,9 \\ 7\,9\,1\,5\,8\,4 \end{pmatrix}$$

Pripadajoče drevo je podano na sliki 4:

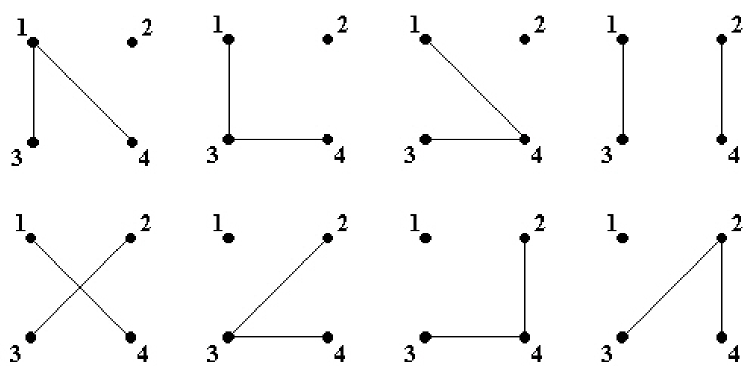
Kako pa drevesu priredimo preslikavo iz N^N? Najprej si pogledamo (enolično) *pot* P iz *levega konca* $\bigcirc$ v *desni konec* $\Box$. Tako dobimo množico M in preslikavo $f|_M$. Preostale točke pa preslikamo glede na (enolično določene) *poti* iz točk i v P.



Slika 4: Drevo, ki ga določa preslikava f

4 Rekurzija in posplošitev za gozdove

Naj bo A poljubna k-množica točk. S $T_{n,k}$ bomo označevali število označenih gozdov na množici točk $\{1, 2, \ldots, n\}$, ki vsebujejo k dreves, kjer točke iz množice A pripadajo različnim drevesom. Očitno je pomembna samo velikost množice A. Opazimo lahko tudi, da velja $T_{n,1} = T_n$. Iz dokaza spodnjega izreka bo torej sledil Cayleyev izrek.



Slika 5: Primer označenega gozda z 2 drevesi, kjer sta točki 1 in 2 v različnih drevesih; $T_{4,2} = 8$, $A = \{1, 2\}$

Poglejmo si torej gozd F in naj bo A množica točk $A = \{1, 2, \ldots, k\}$. Naj bo točka 1 povezana z i točkami. Če izbrišemo točko 1, potem i točk, ki so bile povezane s to točko in preostale točke $2, \ldots, k$ tvori $T_{n-1,k-1+i}$ različnih gozdov. Število možnih izbir i točk izmed $n-k$ točk, različnih od $1,\dots,k$ je enako $\binom{n-k}{i}$. Za vsak $1 \le k \le n$ torej sledi spodnja enakost,

$$T_{n,k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} T_{n-1,\,k-1+i} \tag{1}$$

kjer postavimo $T_{0,\ 0} = 1$,$T_{n,\ 0} = 0$ za $n > 0$, da zagotovimo $T_{n,\ n} = 1$. Sedaj pa lahko dokažemo spodnji izrek.

Izrek 2 (posplošitev za gozdove)

$$T_{n,\ k} = kn^{n-k-1}$$

Dokaz. Po 1 in z uporabo *binomskega izreka* ter *matematične indukcije*, sledi

$$\begin{aligned}
T_{n,\ k} &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (k-1+i)(n-1)^{n-1-k-i} \qquad\qquad (i \to n-k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (n-1-i)(n-1)^{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (n-1)^{i} - \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-k}{i} i(n-1)^{i-1} \\
&= n^{n-k} - (n-k) \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-1-k}{i-1} (n-1)^{i-1} \\
&= n^{n-k} - (n-k) \sum_{i=0}^{n-1-k} \binom{n-1-k}{i} (n-1)^{i} \\
&= n^{n-k} - (n-k)n^{n-1-k} = kn^{n-k-1}
\end{aligned}$$

Kot poseben primer pravkar dokazanega izreka velja za drevesa (k=1)

$$T_{n,\ 1} = T_n = n^{n-2}$$

□

5 Število vpetih dreves povezanega grafa

V tem poglavju si bomo ogledali kako lahko izračunamo število vpetih dreves poljubnega povezanega grafa G, to število bomo označevali s $t(G)$. Na T_n lahko gledamo tudi kot na število vpetih dreves polnega grafa K_n, torej lahko zapišemo $T_n = t(K_n)$. Če je povezan graf drevo potem premore le eno samo vpeto drevo, ki je enako celotnemu grafu. V nadaljevanju bomo izpustili pravkar omenjen trivialni primer, in predpostavili, da obravnavani grafi premorejo vsaj en cikel.

Definicija 1. Naj bo G graf brez zank, s $|V| = n$ točkami in z $|E| = m$ povezavami. Označimo točke s števili $1, 2, \ldots, n$ podobno označimo povezave z $1', 2', \ldots, m'$. *Incidenčna matrika* $B = (b_{i,j})$ je $n \times m$ razsežna matrika, katere element v $i - ti$ vrstici in $j - tem$ stolpcu je enak 1, če je točka i krajišče povezave j in 0 sicer.

Hitro opazimo, da ima vsak stolpec incidenčne matrike natanko dva neničelna elementa. Če seštejemo vse elemente vrstice i dobimo kot rezultat stopnjo točke i $d(i)$.

Podobno definiramo incidenčno matriko digrafa.

Definicija 2. Naj bo G usmerjen graf z množico točk $V = \{1, \ldots, n\}$ in množico povezav $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Matriko $C = (c_{i,j}) \quad (i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m)$, kjer je

$$c_{i,j} = \begin{cases} +1, & \textit{povezava } e_j \textit{ gre iz } \text{točke } i \\ -1, & \textit{povezava } e_j \textit{ gre v } \text{točko } i \\ 0, & \textit{sicer}, \end{cases}$$

imenujemo incidenčna matrika usmerjenega grafa oziroma $digrafa$ G.

Tudi vsak stolpec incidenčne matrike digrafa ima natanko dva neničelna elementa,to sta $+1$ in -1.

Vsakemu grafu G lahko glede na neko izbrano orientacijo priredimo ustrezen digraf, tako da vsaki povezavi določimo smer. To storimo tudi v nadaljevanju in si zamislimo poljuben povezan graf, kot povezan digraf. Ori-

entacija pri našem nadaljnem razmišljanju ne igra nobene pomembne vloge, saj je število vpetih dreves povezanega grafa G in poljubnega digrafa, ki ga dobimo iz poljubne orientacije grafa G enako. Naj bo torej C incidenčna matrika poljubnega povezanega digrafa G. Matrika $M = CC^T$ je simetrična $(n \times n)$ matrika, ki ima za diagonalce stopnje točk $d(1), \ldots, d(n)$. Zgornja ugotovitev sledi iz izreka, ki trdi, da za poljubno $n \times m$ matriko A in poljubno $m \times s$ matriko B velja $(AB)^T = B^T A^T$. Diagonalci matrike M so produkt vrstice matrike C s svojo transponiranko C^T. Torej so vsota 1 in 0, glede na to ali točka i pripada povezavi e_j ali ne.
Ob spodnjem izreku se pogosto pojavljata imeni $Kirchoff$ (1847) in $Trent$ (1954).

Izrek 3 (Matrično-drevesni izrek.) *Število vpetih dreves povezanega grafa je $t(G) = detM_{ii}$ za vsak $i = 1, \ldots, n$, kjer M_{ii} predstavlja matriko, ki jo dobimo tako, da izbrišemo $i-to$ vrstico in $i-ti$ stolpec matrike M .*

Dokaz. Glavni del dokaza predstavlja uporaba *Binet-Cauchyjevega izreka (1817)*[4], katerega vsebina je: Naj bo P $(r \times s)$ matrika in Q $(s \times r)$ matrika, $r \leq s$, potem je $det(PQ)$ enaka vsoti produktov determinant ustreznih $(r \times r)$ podmatrik, kjer izberemo r stolpcev matrike P z enakimi indeksi kot jih izberemo med r vrsticami matrike Q.

Pomembno je le, da je $r \leq s$, kar je izpolnjeno za primer matrike C, saj je C matrika dimenzije $(|V| \times |E|)$, kjer je $|V| = n \leq |E|$, saj je po naši zgornji predpostavki G povezan graf, ki premore vsaj en cikel. Torej je $|E| \geq n$.

Po $Binet-Cauchyjevem$ izreku, za matriko M_{ii} sledi

$$detM_{ii} \;=\; \sum_N detN \cdot detN^T \;=\; \sum_N (detN)^2$$

kjer N teče po vseh $(n-1) \times (n-1)$ podmatrikah matrike D, ki jo dobimo tako, da matriki C izbrišemo vrstico i. Kratek razmislek nam pove, da $n-1$ stolpcev matrike N ustreza podgrafu H grafa G z $n-1$ povezavami na n točkah, kjer je vrstica i, brez i-tega elementa ustrezna manjkajoča vrstica, ki dopolni množico povezav. Za dokaz izreka zadošča pokazati naslednje

[4]dokaz lahko najdemo v [8]

$$detN = \begin{cases} \pm 1, & povezave\ grafa\ razpenjajo\ drevo \\ 0\ , & sicer \end{cases}$$

Poglejmo si kaj lahko povemo o neničelnem elementu poljubne vrstice j matrike N. Ta vrstica nam pove, ali točka j je ali ni krajišče posamezne povezave. Če točka j je povezana s točko različno od točke i potem v ustreznem stolpcu matrike N poleg neničelnega elementa iz vrstice j najdemo še natanko enega, ki je nasprotnega predznaka.

Predpostavimo najprej, da zgoraj omenjenih n-1 povezav ne razpenja drevesa. Potem torej obstaja komponenta, ki ne vsebuje točke i. Če seštejemo vrstice te komponente je njihova vsota enaka 0, kar sledi iz zgornjega razmisleka. Skratka našli smo netrivialno linearno kombinacijo vrstic obravnavane komponente, z drugimi besedami pokazali smo, da so vrstice te komponente linearno odvisne. Po izreku o lastnosti determinant sledi, da je $detN = 0$.

Sedaj pa predpostavimo, da teh n-1 povezav razpenja drevo. Potem obstaja točka $j_1 \neq i$ stopnje 1, pri čemer z f_1 označimo incidenčno povezavo. Z brisanjem j_1 in f_1 dobimo drevo z $n-2$ točkami. Ponovimo prejšnji postopek, torej poiščemo točko $j_2 \neq i$ s stopnjo 1 in incidenčno povezavo f_2. S postopkom nadaljujemo tako dolgo dokler ne določimo vseh $j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}$ in vseh $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$, kjer velja $j_i \in f_i$ za vsak $i = 1, \ldots, n-1$. Očitno vsak f_i enolično določa stolpec, v katerem se nahaja. Poglejmo si permutacijo pravkar indeksiranih vrstic in stolpcev, ki prestavi vrstico j_k v $k - to$ vrstico in f_k v $k - ti$ stolpec. Iz pravkar opisane konstrukcije sledi $j_k \notin f_l$ za $k < l$. Dalje sledi, da je tako dobljena nova matrika N_1 spodnje trikotna z diagonalci enakimi ± 1. Ker je determinanta poševno simetrična funkcija svojih vrstic in stolpcev, kar pomeni, da se z zamenjavo dveh vrstic medseboj ali dveh stolpcev medseboj, spremeni le predznak determinante, sledi $detN = \pm detN_1 = \pm 1$. S tem je dokaz končan.

□

Za poseben primer, ko je graf G poln graf, torej $G = K_n$ sledi ((m_{ij}) je skalarni produkt $i - te$ in $j - te$ vrstice matrike C):

$(m_{ij}) = \begin{cases} \text{-1} & \text{i} \neq \text{j} \\ d(i) & i = j \end{cases}$, kjer je $d(i) = n - 1$, saj je G poln graf.

$$M = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

Po definiciji $(n-1) \times (n-1)$ razsežne matrike M_{ii} sledi:

$$detM_{ii} = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & -n & -n & \dots & -n \\ -1 & n & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (n-1)-(n-2) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & n & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & n & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n^{n-2}$$

Kjer smo na prvem koraku odšteli prvi stolpec vsem ostalim stolpcem v determinanti; na drugem koraku pa smo prvi vrstici prišteli vse ostale vrstice. Kot smo napovedali za primer polnega grafa torej dobimo, da je število označenih vpetih dreves enako n^{n-2}.

6 Posplošitev Cayleyevega izreka za gozdove s koreni

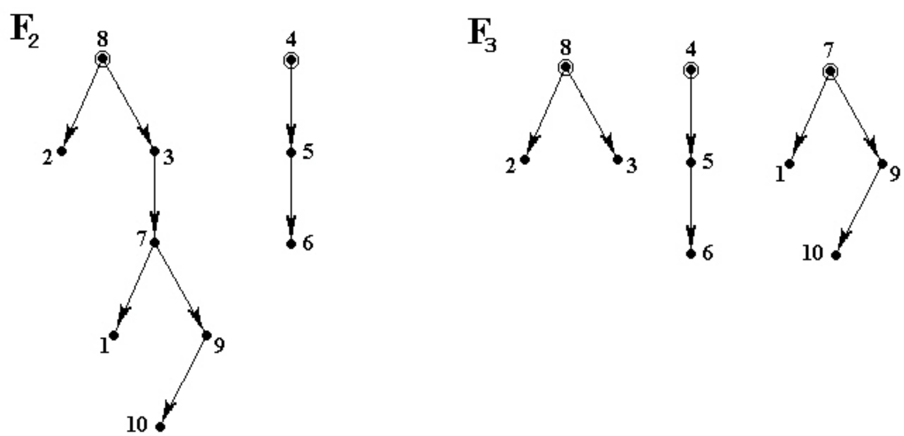
Izredno zanimiv in eleganten je naš zadnji dokaz, ki sodi med novejše rezultate(1999). Njegov avtor je J. Pitman, podrobnosti lahko najdemo v [10].
V praksi[5] lahko velikokrat srečamo situacijo, da je neka točka drevesa izbrana za začetno, iz nje pa izhajajo povezave do drugih točk. Kot zgled lahko navedemo primer iz *genealogije*[6] služi rodovno drevo, kjer najmlajši član predstavlja to začetno točko. Na tak način dobimo hierarhično strukturo. Takim drevesom rečemo *drevesa s koreni*, začetno točko pa poimenujemo

[5] originalen članek [10] je s področja teorije verjetnosti
[6]rodoslovje, nauk o izvoru in medsebojnem razmerju in razvoju rodov

koren. Podobno obravnavamo tudi gozdove.

Z $\mathcal{F}_{n,\ k}$ bomo označevali množico vseh (označenih) gozdov s koreni, sestavljenih iz k dreves . $\mathcal{F}_{n,\ 1}$ naj torej pomeni množico vseh (označenih) dreves s koreni. Za vsako drevo imamo na razpolago n možnih načinov, da izberemo koren. Iz tega sledi $|\mathcal{F}_{n,\ 1}| = nT_n$.

$F_{n,\ k} \in \mathcal{F}_{n,\ k}$ naj predstavlja usmerjen graf, katerega povezave so vse usmerjene stran od korena. Pravimo, da gozd F *vsebuje* gozd $F^{'}$, če je $F^{'}$ *poddigraf* oziroma *podgraf* (usmerjenega) grafa F. Očitno vsak ima vsak F kvečjemu manj komponent od svojih podgrafov.



Slika 6: Gozd F_2 *vsebuje* gozd F_3

V naslednji definiciji se skriva glavna ideja tega dokaza. Pozaporedju $F_1, \ldots, F_k$ gozdov rečemo *prečiščeno zaporedje*, če je $F_i \in \mathcal{F}_{n,i}$ in F_i vsebuje F_{i+1} za vsak i.

Izberimo poljuben gozd F_k iz $\mathcal{F}_{n,k}$ in označimo:

- z $N(F_k)$ število dreves s koreni, ki vsebujejo $N(F_k)$ in
- z $N^*(F_k)$ število *prečiščenih zaporedij*, ki se končajo v F_k.

$N^*(F_k)$ bomo prešteli na dva načina, najprej tako, da bomo začeli šteti pri drevesu in drugič tako, da bomo začeli šteti pri gozdu F_k. Predpostavimo torej, da drevo $F_1 \in \mathcal{F}_{n,1}$ *vsebuje* F_k. Poglejmo si digraf $F_1 - F_k$, ki ga dobimo tako, da iz digrafa F_1 izbrišemo vse točke in povezave iz digrafa F_k. $k-1$ povezav $F_1 - F_k$ lahko izbrišemo na poljuben način, da dobimo *prečiščeno zaporedje* od F_1 do F_k. Iz tega sledi

$$N^*(F_k) = N(F_k)(k-1)! \tag{2}$$

Po drugi strani pa se lahko F_k *"prečisti"* v F_{k-1} tako, da poljubno točko a povežemo s $k-1$ *koreni* dreves, ki ne vsebujejo a (glej tudi sliko 6). Torej imamo $n(k-1)$ možnosti. Podobno velja za F_{k-1}, poljubno točko b lahko povežemo s $k-2$ *koreni* dreves, ki ne vsebujejo b. Torej imamo $n(k-2)$ možnosti. Če tako nadaljujemo, dobimo

$$N^*(F_k) = n^{k-1}(k-1)! \tag{3}$$

Tako na resnično presenetljivo preprost način iz 2 sledi:

$$N(F_k) = n^{k-1}$$

za vsak $F_k \in \mathcal{F}_{n,k}$.

Za primer, ko je $k = n$, je F_n v bistvu množica n nepovezanih točk. Tedaj $N(F_n)$ pomeni število označenih dreves s koreni, in velja $N(F_n) = |\mathcal{F}_{n,\ 1}| = nT_n = n^{n-1}$. Iz česar pa hitro sledi Cayleyev izrek.

Iz formule 3, sledi za primer, ko je $k = n$

$$N^*(F_k) = n^{n-1}(n-1)! \tag{4}$$

$N^*(F_k)$ v tem primeru pomeni število vseh prečiščenih zaporedij $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, ki se končujejo v nekem drevesu F_n.

Za $F_k \in \mathcal{F}_{n,k}$ naj $N^{**}(F_k)$ označuje število vseh tistih prečiščenih zaporedij,

$(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, katerih k-ti člen je F_k. Očitno je $N^{**}(F_k)$ enak številu $N^*(F_k)$ pomnoženemu s številom vseh možnih izbir zadnjih $n-k$ členov zaporedja $(F_{k+1}, \ldots, F_n)$. To pa je enako $(n-k)!$, saj lahko lahko izbrišemo poljubno izmed $n-k$ povezav F_k. Zato sledi

$$N^{**}(F_k) = N^*(F_k)(k-1)! = n^{k-1}(k-1)!(n-k)! \tag{5}$$

$N^{**}(F_k)$ ni odvisno od izbire F_k, zato nam deljenje enačbe 5 z enačbo 4 da število gozdov s k drevesi:

$$|F_{n,k}| = \frac{n^{n-1}(n-1)!}{n^{k-1}(k-1)!(n-k)!} = \binom{f}{k} kn^{n-1-k}$$

k korenov lahko izberemo na $\binom{f}{k}$ možnih načinov, zato iz zgornje vrstice sledi izrek 2 iz 4 poglavja, ki smo ga tokrat dokazali brez uporabe indukcije. Povedano strnimo v izrek.

Izrek 4 (Posplošitev za gozdove s koreni.) *Število gozdov s koreni, s k drevesi, je enako: $|F_{n,k}| = \binom{f}{k} kn^{n-1-k}$.*

7 Primer iz algebre: Minimalna množica transpozicij

Prüferjev dokaz Cayleyevega izreka sodi med prve (popolne) dokaze. Prüferjev članek *"Nov dokaz izreka o permutacijah"*[7] ima za motivacijo problem s področja teorije grup zato za konec sledi še en zanimiv primer iz tega področja, ki je povzet po [4].

Generiranje permutacij s pomočjo transpozicij

Naj bo S_n n-ta simetrična grupa, torej množica vseh permutacij množice $N = \{1, \ldots, n\}$, z operacijo kompozituma. Transpozicije so permutacije, ki

[7] angleški prevod v[3]

zamenjajo medseboj dve točki ostale pa pustijo na svojih mestih. V nadaljevanju bomo za transpozicijo, ki med seboj zamenja elementa k in l uporabljali oznako t_{kl}.

Med osnovne izreke iz algebre spada ugotovitev, da lahko vsako permutacijo iz S_n zapišemo kot produkt končnega števila transpozicij. Pri tem ni potrebno uporabiti vseh možnih transpozicij. Dovolj je na primer uporabiti le transpozicije $t_{12}, t_{13}, \ldots, t_{1n}$. Zato je smiselno definirati naslednji pojem.

Definicija. Množica transpozicij T je *minimalna*, če lahko poljubno permutacijo iz S_n zapišemo kot produkt transpozicij iz T in te lastnosti nima nobena prava podmnožica množice T.

Postavimo si naslednji vprašanji:

- Kdaj je množica transpozicij T *minimalna* ?
- Koliko je takih množic T[8]?

Naj bo torej T neka množica transpozicij. Urejenemo paru (N, T) priredimo graf (N, σ_T), kjer je točka i povezana s točko j natanko tedaj, ko je $t_{ij} \in T$. Pravimo, da množica transpozicij T *generira* permutacijo b, če b lahko zapišemo kot nek produkt transpozicij iz T.

Lema 1 *Množica transpozicij T množice N generira transpozicijo t_{pq} natanko tedaj, ko sta točki p in q grafa (N, σ_T) povezani s potjo.*

Dokaz. Če sta točki p in q povezani s potjo $j_1 = p,\ j_2, \ldots,\ j_k = q$ potem je lahko razmisliti, da velja

$$t_{pq} = t_{j_1 j_2} t_{j_2 j_3} \ldots t_{j_{k-1} j_k} t_{j_{k-1} j_{k-2}} \ldots t_{j_2 j_1}$$

Naj sedaj velja, da točki p in q nista povezani s potjo. Poglejmo si množico točk do katerih lahko pridemo po neki poti iz p in označimo to množico z X. Tedaj velja $q \in N \backslash X$ in transpozicije iz T medseboj zamenjujejo le točke iz X ali iz $N \backslash X$. Če bi množica transpozicij T generirala transpozicijo t_{pq}, bi obstajala vsaj ena transpozicija, ki bi med seboj zamenjala nek element iz množice X z elementom iz množice $N \backslash X$. Tedaj pa bi obstajala pot med točkama p in q, kar je v protislovju s predpostavko. $\square$

Sedaj pa že lahko odgovorimo na prvo vprašanje.

[8] problem iz Prüferjevega članka

Izrek 5 (Izrek o minimalni množici transpozicij) *Množica T je minimalna množica transpozicij natanko tedaj, ko je graf (N, σ_T) drevo.*

Dokaz. Po lemi 1 velja, da množica transpozicij T generira S_n natanko tedaj, ko je (N, σ_T) povezan graf.
Če je T minimalna potem za vsako pravo podmnožico $U \subset T$ velja, da graf (N, σ_U) ni povezan. Obratno vsak povezan graf (N, σ_T), za katerega velja, da z odstranitvijo poljubne njegove povezave, postane nepovezan, določa minimalno množico transpozicij. Torej je (N, σ_T) drevo.

□

Posledica 1 *Vsaka minimalna množica transpozicij množice z n elementi vsebuje natanko $n-1$ transpozicij.*

Kot posledica Cayleyevega izreka 1 in izreka 5 sledi naslednja ugotovitev.

Posledica 2 *Število minimalnih množic transpozicij množice z n elementi je enako n^{n-2}.*

8 Zaključne misli

V seminarski nalogi je bil obravnavan problem štetja označenih dreves. V primeru, ko je število točk $n = 3$, so si vsa 3 (različna) označena drevesa izomorfna. Ko je $n = 4$, sta si 2 drevesi neizomorfni. Za $n = 5$ obstajajo 3 različna neoznačena drevesa. Že iz teh opažanj se vidi, da gre v primeru štetja neoznačenih dreves za popolnoma drug problem. Medtem, ko je problem štetja označenih dreves rešen in je poznana lepa in enostavna formula za izračun števila označenih dreves, pa problem štetja neoznačenih dreves še vedno ni v celoti rešen, saj ni poznana nobena enostavna formula. Število neoznačenih dreves je možno izračunati s pomočjo spodnje rodovne funkcije[9]:

$$G(x) = 1 + T(x) - T^2(x)/2 + T(x^2)/2, \ kjer\ je\ T(x) = x + x^2 + 2x^3 + ...$$

Več o tem je možno poiskati na :

`http://www.research.att.com/~njas/sequences/`

[9]Izpeljava Cayleyeve formule s pomočjo rodovne funkcije je obravnavana v [6].

A Program napisan s pomočjo programa *Mathematica 4.1*

Program na podlagi vseh možnih urejenih izbir z $n-2$ elementi iz množice prvih n naravnih števil nariše vsa možna označena drevesa na n točkah. Opomba: potrebno je naložiti paket *Combinatorica*.

```
<<DiscreteMath`Combinatorica`

ProgramIzpis[n_] := Module[{a = "Table[{", l = n - 2},
            For[i = 1, i <= l, a = a <> "a" <> ToString[i] <> ","; i++];
    a = StringDrop[a, -1] <> "},";
        For[i = 1, i <= l,
      a = a <> "{a" <> ToString[i] <> ",1," <> ToString[n] <> "},"; i++];
    a = StringDrop[a, -1] <> "]"; ToExpression[a]
    ]

    Oznacenadrevesa[n_] :=
    Module[{i, r, Vse},
    r = ProgramIzpis[n];
    Vse = Partition[Flatten[r], n - 2];
    For[i = 1,
        i <= n^(n - 2),
        ShowLabeledGraph[
          CodeToLabeledTree[Vse[[i]]]];
          Print["Prferjeva koda",
          Vse[[i]]];
          i++]]
```

Literatura

[1] M. Aigner: *Combinatorial Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1979, Reprint 1997.

[2] M. Aigner, G. M. Ziegler: *Proofs from THE BOOK*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1999.

[3] N. L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson: *Graph Theory*, Clarendon Press, Oxford 1998.

[4] D. Cvetković: *Teorija grafova i njene primene*, Naučna knjiga, Beograd 1986.

[5] N. Deo, P. Micikevicius: *Prufer-like Codes for Labeled Trees* , Congressus Numerantium, vol. 151, pp. 65-73, 2001, dostopno tudi na internetu na: http://www.cs.ucf.edu/~pmicikev/

[6] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik: *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts 1994.

[7] D. Jungnickel: *Graphs, Networks and Algorithms*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1999.

[8] S. Kurepa: *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Sveučilišna naklada Liber, Zagreb 1986.

[9] L. Lovasz, K. Vesztergombi: *Discrete Mathematics*, Lecture notes, Yale University, Spring 1999, dostopno tudi na internetu na: http://research.microsoft.com/users/lovasz/notes.htm

[10] J. Pitman: *Coalescent random forests*, J. Combinatorial Theory, Ser. A, 85, 165-193, 1999, dostopno tudi na internetu na: http://stat-www.berkeley.edu/users/pitman/bibliog.html

[11] J. Riordan: *Forests of labeled trees*, J. Combinatorial Theory 5, 90-103, 1968.

[12] M. Rubey: *Counting spanning trees*, Diplomarbeit, Wien 2000, dostopno tudi na internetu na: http://www.mat.univie.ac.at/~kratt/students.html

[13] R. J. Wilson, J. J. Watkins: *Uvod v teorijo grafov*, DMFA, Ljubljana 1997. 2, 7 7 2 9 4 6, 5 2 2